विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 12 | जनवरी 1969 | संख्या 1

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No 1, January 1969, Pages 1-9

भारत में विज्ञान की शिक्षा का माध्यम*

डा० ब्रज मोहन
काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

मित्रो !

जब से हिन्दी भारत की राष्ट्रभाषा स्वीकार हुई है तब से देश के विद्वानों का ध्यान शिक्षा के माध्यम की ओर आकृष्ट हुआ है। अभी तक बहुत से वैज्ञानिकों का यह मत है कि इस देश में विज्ञान की शिक्षा का माध्यम अंग्रेजी ही रहना चाहिए। कारण स्पष्ट है:

1. बाहरी दुनिया से हमारा सम्पर्क अंग्रेजी द्वारा हुआ है। यदि अंग्रेजी को अपने स्थान से च्युत कर दिया जायगा तो अन्य देशों के वैज्ञानिकों से हमारा सम्पर्क टूट जायगा और हम कूप-मंडूक होकर रह जाएँगे।

2. भारतीय भाषाओं में अभी तक कोई वैज्ञानिक शब्दावली और संकेतलिपि नहीं बनी है। यदि हम इन दोनों का भारतीय भाषाओं में बनाने का प्रयास करें तो उसी में दस-बीस वर्ष लग जायँगे और हम लोग वैज्ञानिक प्रगति में पीछे रह जायँगे।

3. भारतीय भाषाओं में अभी तक वैज्ञानिक पुस्तकों का सर्वथा अभाव है। पुस्तकें तैयार करने के लिए लम्बा समय चाहिए। दशाब्दियों में भी हम इतने ऊँचे स्तर की पुस्तकें नहीं बना पायेंगे जितने ऊँचे स्तर की अंग्रेजी में हैं। अतएव भारत में देशी भाषाओं को माध्यम बनाने से विज्ञान की शिक्षा का स्तर नीचे गिर जायगा।

अब इन प्रश्नों का उत्तर तो मैं बाद में दूँगा। पहले हमें इस बात पर विचार करना है कि अंग्रेजी द्वारा शिक्षा देने में देश की कितनी हानि हो रही है। आज से 15-20 वर्ष पूर्व हमारे विश्वविद्यालयों में शिक्षा का माध्यम शुद्ध अंग्रेजी था। इन दो दशाब्दियों के अन्दर उत्तरी भारत के कुछ विश्वविद्यालयों में हिन्दी को माध्यम बनाने का प्रयास हुआ है। सम्भव है कि दक्षिण के कुछ विश्वविद्यालयों में भी इस दिशा में कुछ प्रयत्न हो रहा हो। परन्तु अब भी देश के प्रायः सभी विश्वविद्यालयों में शिक्षा का माध्यम अधिकतर अंग्रेजी ही है। स्कूलों में तो अधिकांश प्रदेशों में शिक्षा का माध्यम हिन्दी बन गई है

* 3 जनवरी 1969 को बम्बई में आयोजित 56-वें साइंस काँग्रेस के अवसर पर विज्ञान परिषद् अनुसन्धान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्षपदीय भाषण।

और इंटरमीजियेट कक्षाओं में हिन्दी और अंग्रेजी का मिश्रण आरम्भ हो गया है परन्तु बी० एस-सी० और एम० एस-सी० की कक्षाओं में प्राय: अंग्रेजी ही चल रही है।

इन्हीं दस-बीस वर्षों के अन्दर मेरा तो एक सुखद अनुभव हुआ है और मेरा विचार है कि मेरे अन्य सहयोगियों को भी इसी ढंग का अनुभव हुआ होगा। जब मैं इंटरमीजियेट और बी० एस-सी० की कक्षाओं में अंग्रेजी में पढ़ाता था तो विद्यार्थियों को अपनी कठिनाइयाँ उपस्थित करने में संकोच होता था। परन्तु जबसे हम लोगों ने हिन्दी में पढ़ाना आरम्भ किया है तबसे विद्यार्थी कक्षा में बेखटके प्रश्न करने लगे हैं। कारण यह है कि कोई कितनी भी अंग्रेजी क्यों न पढ़ जाय परन्तु एक विदेशी भाषा सदैव विदेशी ही रहेगी। वह विद्यार्थी की मातृभाषा का स्थान कदापि नहीं ले सकती। अपनी मातृभाषा अथवा प्रादेशिक भाषा एक विद्यार्थी माँ के दूध के साथ सीख कर आता है अतएव जितनी सुविधा उसे अपनी भाषा बोलने में होगी उतनी किसी विदेशी भाषा में कदापि नहीं हो सकती। सौ-दो-सौ में दो चार व्यक्ति ऐसे अवश्य निकल आयेंगे जिन्हें अँग्रेजी का बोध अपनी मातृभाषा से भी अधिक हो जाता है परन्तु अपवादों से किसी नियम का निराकरण नहीं होता।

कहने को तो हम लोग केवल अँग्रेजी के घंटों में ही अंग्रेजी पढ़ाते हैं परन्तु वास्तव में हम लोग न्यूनाधिक रूप में भी भौतिक विज्ञान, रसायन, गणित आदि के घंटों में भी अँग्रेजी की शिक्षा देते हैं। आए-दिन देखने में आता है कि विद्यार्थी प्रश्नों का मतलब समझ नहीं पाते, इसलिए कि उनमें अँग्रेजी के कठिन शब्द आ जाते हैं। प्रयोजित गणित और भौतिकी में कहीं-कहीं पर Disc और Saucer जैसे शब्द आ जाते हैं जिनका अर्थ भी विद्यार्थियों को बतलाना पड़ता है। यदि इन शब्दों के स्थान पर रकाबी या तश्तरी कहा जाय तो विद्यार्थियों को समझने में कोई कठिनाई न पड़े। एक बार एक प्रश्न में आया था: A caterpillar crawls। एक विद्यार्थी ने मुझसे आकर पूछा कि cat का अर्थ तो बिल्ली है और pillar का अर्थ खम्भा है, परन्तु caterpillar के क्या अर्थ हैं? यदि इस वाक्य के बदले पुस्तक में लिखा हो कि एक कीड़ा रेंगता है तो इसका अर्थ समझाने की कोई आवश्यकता ही न रह जाय। एक विद्यार्थी ने एक दिन मुझसे पूछा कि "अभी आपने कौन वर्डवा बोला था।" एक अन्य विद्यार्थी एक दिन मेरे पास कलन (calculus) का एक प्रश्न ले आया जिसमें एक सीमा (Limit) निकालनी थी। उसने मुझसे आकर पूछा कि मास्टर साहब इसकी 'लिमिटिया' कैसे निकलेगी? इन उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि यद्यपि विद्यार्थी अँग्रेजी द्वारा शिक्षा प्राप्त करते हैं परन्तु उनका मस्तिष्क ठेठ हिन्दुस्तानी ही बना रहता है और उनको अपनी मातृभाषा में ही अपने भाव व्यक्त करने में सुविधा होती है।

अँग्रेजी द्वारा एक हानि और हो रही है। चूँकि विद्यार्थियों को कालेजों और विश्वविद्यालयों में अँग्रेजी द्वारा शिक्षा प्राप्त करनी होती है इसलिए उन्हें स्कूल में अंग्रेजी की शिक्षा बहुत ऊँचे स्तर की प्राप्त करनी होती है। अतएव स्कूल में उनको बहुत सा समय अँग्रेजी भाषा के जानने में ही लगाना पड़ता है। इधर दस-बीस वर्षों के अन्दर इस परिस्थिति में थोड़ा सा अन्तर हुआ है परन्तु दस-बीस वर्षों पहले तो यह दशा थी कि जितना समय किसी विद्यार्थी को अँग्रेजी पर लगाना पड़ता था उतना समय किसी अन्य विषय पर नहीं लगाना पड़ता था। यदि नीचे से ऊपर तक शिक्षा का माध्यम देशी भाषाएँ हो जाएँ तो विद्यार्थी का जो समय बच जायगा वह अन्य विषयों पर लगाया जायेगा और हम शिक्षा के स्तर को ऊँचा कर

सकेंगे। अभी तक यह स्थिति है कि इंग्लैंड का एक विद्यार्थी किसी विषय का जितना ज्ञान बी० एस-सी० कक्षा तक प्राप्त कर लेता है उतना ज्ञान इस देश का विद्यार्थी नहीं कर पाता। कारण यह है कि इंग्लैंड का विद्यार्थी आदि से अन्त तक अपनी मातृभाषा द्वारा शिक्षा ग्रहण करता है। यदि हमारे देश में भी शिक्षा का माध्यम देशी भाषाएँ हो जाएँ तो हमारे विद्यार्थियों का कम से कम एक वर्ष बच जाय। संभव है कि दो वर्ष बच जावें। इस प्रकार हम अपने देश की शिक्षा को उसी स्तर पर ला सकेंगे जिस स्तर पर इंग्लैंड अथवा अन्य पश्चिमी देशों में है।

अँग्रेजी के माध्यम के कारण हमारे युवकों में एक-दो दोष आ गए हैं। न वे शुद्ध अँग्रेजी बोल सकते हैं न शुद्ध रूप में अपनी मातृभाषा। मेरा सम्पर्क अधिकतर हिन्दी से रहा है अतएव मैं दो-एक उदाहरण हिन्दी से दूँगा। आजकल एक नए ढंग की बोली तैयार हो रही है, जो न हिन्दी है न अँग्रेजी वरन् दोनों की बेमेल खिचड़ी है। एक विद्यार्थी दूसरे से कहता है 'बस तुम मुझे एक letter drop कर देना।' दूसरा कहता है, "तुमने Find out नहीं किया, जरा Find out कर लेना।" एक तीसरा विद्यार्थी कहता है मैंने तो अभी इस Problem पर think ही नहीं किया है।" एक दिन मेरे एक मित्र एक तौलिया खरीद कर लाए थे। मैंने उनसे पूछा कि यह तौलिया कितने की है, तो बोले कि "Two rupees से मोर ही मोर है।"

इन तथ्यों से स्पष्ट है कि अँग्रेजी के माध्यम का हमारे विद्यार्थियों और हमारी भाषाओं पर घातक प्रभाव पड़ रहा है। मेरे विचार में किसी भी व्यक्ति का यह जन्मसिद्ध अधिकार है कि उच्च से उच्च शिक्षा अपनी मातृभाषा द्वारा प्राप्त करे। इस सिद्धान्त में केवल थोड़ी सी कठिनाई पड़ेगी। मान लीजिए कि एक बंगाली परिवार मद्रास में जाकर बसता है। मद्रास के स्कूलों और कालेजों में शिक्षा का माध्यम तमिल अथवा तेलगू होगा। उस बंगाली परिवार के बच्चों के लिए मद्रासी स्कूल बँगला में शिक्षा देने का प्रबन्ध नहीं कर सकेगा क्योंकि स्कूल में बंगाली बच्चों की संख्या बहुत कम होगी। अतएव मैं उप-रिलिखित सिद्धान्तों में केवल एक ही संशोधन करूँगा कि हमारे देश में शिक्षा का माध्यम प्रादेशिक भाषायें होनी चाहिए अर्थात् बंगाल में बँगला, गुजरात में गुजराती, महाराष्ट्र में मराठी तथा उत्तरी और मध्यप्रदेशों में हिन्दी।

अब मैं उन प्रश्नों को लेता हूँ जिन्हें मैंने आरम्भ में उठाया था। यह कहना सत्य है कि यदि हम लोग अँग्रेजी का बहिष्कार कर दें तो हमारा बाहरी दुनिया से सम्पर्क टूट जायगा। अँग्रेजी अब केवल अँग्रेजों की ही भाषा नहीं रह गई है, वह संसार भर की व्यापारिक भाषा होती जा रही है और अन्तर-राष्ट्रीय क्षेत्र में उसका बहुत ऊँचा स्थान है। आज से 40 वर्ष पहले योरुप भर में दो भाषायें प्रचलित थीं अग्रेजी और फ्रेंच। दोनों ही अन्तरराष्ट्रीय भाषाएँ कहलाती थीं परन्तु अब स्थिति बदल गई है। दिन पर दिन अँग्रेजी का महत्व बढ़ रहा है और फ्रेंच का महत्व घट रहा है। आज से 40 वर्ष पहले एक आन्दोलन उठा था एक सर्वमान्य सांसारिक भाषा बनाने का। एक नयी भाषा यसपरान्टो की नींव डाली गई थी और आशा की जाती थी कि कदाचित् यसपरान्टो सारे संसार की भाषा बन जाय। अब यसपरान्टो का आन्दोलन तो समाप्त हो चुका है और यह स्पष्ट दिखाई पड़ रहा है कि किसी दिन कदाचित् अँग्रेजी ही सांसारिक भाषा बन जायगी।

अतएव अँग्रेजी का वहिष्कार करना मूर्खता होगी ; परन्तु क्या हम वास्तव में अँग्रेजी का बहिष्कार करने जा रहे हैं ? मेरा तो यह विचार नहीं है कि अँग्रेजी को बोरिया-बँधना उठाकर देश से बाहर निकाल दिया जाय । मैं समझता हूँ कि देश में बहुत कम विचारक ऐसे होंगे जो इस विचार के हों कि अँग्रेजी को पूर्ण रूप से टाट बाहर कर दिया जाय । जब हम यह कहते हैं कि अँग्रेजी हमारे देश में शिक्षा का माध्यम न रहे तो उसका अर्थ केवल इतना ही है कि भाषाओं को छोड़कर अन्य विषय—भौतिकी, रसायन, भौमिकी इत्यादि अँग्रेजी द्वारा न पढ़ाए जाएं । हमारा यह तात्पर्य कदापि नहीं है कि अँग्रेजी भाषा के रूप में भी न पढ़ाई जाय। लगभग 40 वर्ष पहले जब मैं जर्मनी में था, उस समय जर्मनी के स्कूलों में जर्मन के अतिरिक्त योरुप की दो अन्य भाषायें पढ़ाई जाती थीं । स्कूल के अन्तिम दो वर्षों में विद्यार्थी को योरुप की भाषाओं में से दो भाषायें अनिवार्य रूप से चुननी पड़ती थीं और मुझे वहाँ के एक विद्यार्थी ने बताया कि उन्हीं दिनों एक प्रस्ताव उपस्थित होने वाला था कि प्रत्येक विद्यार्थी को दो भाषाओं के बदले चार भाषाएँ पढ़नी पड़ेंगी । मैंने उस विद्यार्थी से पूछा कि तुम इस प्रस्ताव को कहाँ तक पसन्द करते हो ? उसने कहा कि हमारे लिए यह प्रस्ताव बहुत ही लाभदायक होगा, क्योंकि हमारा देश योरुप के मध्य में स्थित है । हमारा तो दिन-रात अपने पड़ोसी देशों से सम्पर्क रहता है । हम तो जितनी भी योरोपीय भाषायें सीख सकें, अच्छा ही है ।

मेरा तो विचार है कि अभी कम से कम दस-बीस वर्ष तक तो अँग्रेजी को हमारे स्कूलों और कालेजों में स्थान मिलना ही चाहिए और वह भी वैकल्पिक रूप में नहीं, वरन अनिवार्य रूप में । मेरा विचार है कि स्कूलों में पहले तीन-चार वर्षों तक तो केवल प्रादेशिक भाषा पढ़ाई जाय और छठी या सातवीं कक्षा से इंटरमीजिएट तक थोड़ी-सी अँग्रेजी अनिवार्य रूप से पढ़ाई जाय । इस प्रकार हमारी प्रादेशिक भाषाओं का महत्व भी बढ़ जायगा ; शिक्षा का माध्यम भी बदल जायगा और अँग्रेजी से हमारा सम्पर्क भी न टूटने पायेगा ।

दूसरा प्रश्न यह है कि हमारी प्रादेशिक भाषाओं में कोई वैज्ञानिक शब्दावली तैयार नहीं है । शब्दावली की दिशा में देश में कई स्थानों पर, विशेषकर केन्द्रीय सरकार द्वारा, प्रयत्न हो रहे हैं । यह कोई ऐसी कठिनाई नहीं है जिसका समाधान न हो सके। कुछ पारिभाषिक शब्द तो ऐसे हैं जिन्हें हम ज्यों-का-त्यों अँग्रेजी से ले सकते हैं । जैसे नाप-तोल की इकाइयाँ :—सेन्टीमीटर, इंच, टन, पौंड, अर्ग, डाइन । शेष शब्दों में से प्रारम्भिक विज्ञान के बहुत से शब्द तो अधिकतर देशी भाषाओं में विद्यमान हैं । शेष शब्द जो नये बनाने पड़ें वह हम संस्कृत मूल से बना लें । संस्कृत देश की आदि-भाषाओं में से है और अधिकांश प्रादेशिक भाषाओं से इसका घनिष्ट सम्बन्ध है । जो शब्द संस्कृत से बनेंगे वे देश की प्रायः सभी भाषाओं में प्रचलित हो सकते हैं । इस प्रकार वैज्ञानिक शब्दावली की समस्या बहुत कुछ हल हो जायगी ।

संकेतन और अक्षरांकन

वैज्ञानिक शब्दावली के साथ ही साथ हमें वैज्ञानिक संकेतन और अक्षरांकन की समस्याओं पर भी विचार करना है । इस विषय पर भी देश में बड़ा मत-वैभिन्य दिखाई दे रहा है । पिछले दस-बारह वर्षों से तो दोनों ओर से तर्क-वितर्क भी चल रहे थे किन्तु हाल ही में हमें आशा की एक किरण दिखाई

दी है कि कदाचित् दोनों प्रकार के विचारकों में समझौता हो जाय। केन्द्रीय सरकार ने यह निश्चय कर लिया है कि संकेतन तो हमें ज्यों-का-त्यों अँग्रेजी से ले लेना चाहिए क्योंकि वह अब प्रायः अन्तरराष्ट्रीय बन चुका है; किन्तु शब्दावली हमें अपनी ही बनानी चाहिए। शब्दावली के क्षेत्र में भी हमें ऐसे बहुत से शब्द लेने होंगे जो अन्तरराष्ट्रीय स्तर तक पहुँच चुके हैं। इतना अवश्य है कि जहाँ कहीं आवश्यकता हो हम उन्हें थोड़ा-बहुत संशोधित करके भारतीय कलेवर प्रदान कर सकते हैं। इस संबंध में हम यहाँ वैज्ञानिक आयोग के उस निश्चय का उद्धरण देते हैं जो उन्होंने 18 नवम्बर 1961 को किया था:

1. जो अंक, संकेत और चिन्ह गणित और अन्य विज्ञानों में प्रयुक्त होते हैं उन्हें उनके वर्तमान अँग्रेजी रूप में ही लिखना चाहिए। जो रोमन और ग्रीक अक्षर गणितीय संक्रियाओं में प्रयुक्त होते हैं उन्हें भी उसी रोमन अथवा ग्रीक रूप में लिखना चाहिए।

2. अँग्रेजी और ग्रीक के कुछ शब्द स्थिरांकों का काम देते हैं, जैसे π, e, g, γ। इन्हें हिन्दी में भी इसी रूप में लिखना चाहिए।

3. ज्यामितीय आकृतियों में भारतीय अक्षरों क, ख, ग, घ का प्रयोग करना चाहिए; किन्तु त्रिकोणमितीय सम्बंधों और सूत्रों आदि में अंग्रेजी और ग्रीक वर्णों को ही प्रयुक्त करना चाहिए।

इस निश्चय से तो ऐसा प्रतीत होता है कि हम उच्च ज्यामितीय आकृतियों में भारतीय वर्णों का प्रयोग कर सकते हैं; किन्तु यहाँ तुरन्त एक कठिनाई आती है। मान लीजिये कि हम निर्देशांक ज्यामितीय (Coordinate Geometry) का कोई प्रारम्भिक साध्य प्रतिपादित कर रहे हैं और रेखाचित्र खींचकर उसमें नागरी अक्षरों का प्रयोग करते हैं। मान लीजिए कि हमें निम्नलिखित सूत्र देना है—

$$PQ^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

उपर्युक्त निश्चय के अनुसार हमें यह सूत्र तो रोमन वर्णों में ही देना होगा; किन्तु चित्र में अक्षर दिए गए हैं नागरी के क, ख, ग, ...। अब प्रश्न यह है कि आकृति के अक्षरों और सूत्र के संकेतों में किस प्रकार सामंजस्य बिठाया जाय। स्पष्ट है कि कम से कम वैश्लेषिक ज्यामिति (Analytical Geometry) में तो हमें रोमन और ग्रीक वर्णों का ही प्रयोग करना पड़ेगा। इतना ही नहीं, ठोस मापिकी (Solid Mensuration) जैसे विषय में भी, जो हम माध्यमिक कक्षाओं में पढ़ाते हैं, हमें इस प्रकार के सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है:

$$\text{गोले का आयतन}=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

अतः यहाँ भी हमें रोमन और ग्रीक वर्णों का ही प्रयोग करना होगा। वज्रानुपात ज्यामिति (Cross Ratio Geometry) में भी इस प्रकार के सूत्र बराबर आते रहते हैं।

$$\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_4)}{(x_2-x_3)(x_4-x_1)}=-1$$

इन तथ्यों से यह निष्कर्ष अनिवार्य है कि उच्च ज्यामिति में हम भारतीय लिपियों के वर्णों का प्रयोग नहीं कर सकते। कदाचित् शुद्ध ज्यामिति (Pure Geometry) की कुछ पुस्तकों में यह सम्भव हो किन्तु व्यावहारिक दृष्टि से सुविधा इसी में होगी कि हम उच्च ज्यामिति के समस्त विषयों में रोमन और ग्रीक वर्णों का ही प्रयोग करें।

हम यहाँ उपरिलिखित तथ्यों का सारांश देते हैं:

(क) स्कूल अंकगणित में हमें अंग्रेजी अंकों का ही प्रयोग करना होगा जिन्हें अब लोग भारतीय अंकों का अन्तरराष्ट्रीय रूप कहने लगे हैं।

(ख) बीजगणित में हमें जिस दिन से विद्यार्थी उक्त विषय का आरम्भ करता है, उसी दिन से अँग्रेजी अक्षरों $a, b, c, \ldots x, y, z$ का प्रयोग करना होगा।

(ग) स्कूल की ज्यामिति में हम भारतीय अक्षरों का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ हम त्रिभुजों को क ख ग और चतुर्भुजों को क ख ग घ से निरूपित कर सकते हैं।

(घ) त्रिकोणमिति में हमें त्रिकोणमितीय अनुपातों को उनके वर्तमान अँग्रेजी रूप में ही रखना होगा। जैसे—

$$\sin A, \quad \cos B, \quad \tan C, \ldots .$$

(ङ) कलन (Calculus) में हमें अवकलन (Differentiation) और समाकलन (Integration) के चिन्हों को ज्यों-का-त्यों अपनाना होगा। जैसे—

$$\frac{dy}{dx}, \int f(x)dx$$

(च) भौतिकी और रसायन के समस्त संकेत ज्यों-के-त्यों बने रहेंगे। उदाहरणार्थ

Silver के लिए पर्याय तो रजत रहेगा; किन्तु उसका संकेत Ag होगा जो argentum का संकेत है।

भारतीय भाषाओं की वैज्ञानिक पुस्तकों में water के लिए 'जल' का प्रयोग होगा किन्तु उसका संकेत H_2O रहेगा।

अतः रसायन के समस्त समीकरण अँग्रेजी रूप में ही दिए जायेंगे।

हम यहाँ प्रारम्भिक कलन के एक प्रश्न का हल देते हैं।

Find, from first principles, the differential coefficient of $\sin x$.

We have

$$\frac{d}{dx}\sin x = \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}, \quad \text{by definition}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{h\to 0} \tfrac{2}{h}\cos(x+\tfrac{1}{2}h)\sin\tfrac{1}{2}h = \operatorname*{Lt}_{h\to 0}\left\{\cos(x+\tfrac{1}{2}h)\,\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\right\}$$

But $$\operatorname*{Lt}_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \operatorname*{Lt}_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

$\because$ $$\frac{dy}{dx} = \operatorname*{Lt}_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{1}{2}h) = \cos x, \text{ i.e. } \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

हिन्दी में यह प्रश्न इस प्रकार लिखा जायगा :

आदि सिद्धान्तों से sin x का अवकल गुणांक निकालो।

इस प्रश्न के हल में केवल निम्नलिखित तीन पदों का ही हिन्दी अनुवाद किया जायगा—

We have—हमें प्राप्त है by definition—परिभाषा से but—किन्तु

शेष सारा हल ज्यों-का-त्यों बना रहेगा।

जो शब्द अंग्रेजी से ले लेने हैं

1. अँग्रेजी के कई प्रकार के बहुत से ऐसे शब्द हैं जिन्हें हम ज्यों-का-त्यों अपना सकते हैं। सबसे महत्त्वपूर्ण तो वे हैं जिन्हें अन्तरराष्ट्रीय कहा जाता है। **शब्दावली आयोग** ने ऐसे शब्दों का वर्गीकरण किया है—

(क) तत्त्वों और संयोगों के नाम। जैसे—ऑक्सीजन, हीलियम, कार्बन-डाई-आक्साइड।

(ख) नाप तौल के मात्रक। जैसे—अर्ग, डाइन, कैलरी, एम्पियर, ओह्म, फैरेडे, पाउण्डल, सेण्टीमीटर, किलोग्राम।

(ग) वानस्पतिकी, प्राणिकी और भौतिकी जैसे विज्ञानों की द्विपद नामावली।

2. देश में बहुत से ऐसे शब्द प्रचलित हो गए हैं जिन्हें अन्तरराष्ट्रीय पद प्राप्त है। ऐसे शब्दों को भी हमें अपनाना ही होगा। जैसे—रेडियो, पेट्रोल, रडार, स्टेशन, रेल, इंजन, मोटर कार।

3. हमारे लिए नाम संबंधी शब्दों को भी अपनाना आवश्यक है। जैसे—

Raman Effect	—	रमन प्रभाव
Gibb's Phenomenon	—	गिब की परिवृत्ति
Newton's Theorem	—	न्यूटन का प्रमेय
Taylor's Series	—	टेलर की श्रेणी

विभक्ति वाले पदों में से हम विभक्ति को हटाकर उन्हें कुछ छोटा रूप दे सकते हैं। हम Newton's Theorem, को "न्यूटन प्रमेय," और Taylor's Series को "टेलर श्रेणी" कह सकते हैं।

यह उदाहरण है नामों से उत्पन्न पदों का। इसके अतिरिक्त कुछ पारिभाषिक शब्द ऐसे भी होते हैं जो नामों द्वारा उत्पन्न हुए हैं और स्वयं नाम बन गए हैं। जैसे—

Laplacian—लैप्लासियन Jacobian—जैकोबियन Wronskian—रॉन्स्कियन

Polonium—पॉलोनियम Europium—यूरोपियम

ऐसे शब्दों को भी हमें आत्मसात कर लेना है। इतना अवश्य है कि यह सब नागरी लिपि में लिखे जायँगे।

4. कई प्रकार के महत्त्वपूर्ण शब्द ऐसे होते हैं जो खगोलकीय पिण्डों (astronomical bodies), ठोसों, उपकरणों, वक्रों अथवा विषयों को द्योतित करते हैं। ऐसे शब्दों के लिए हमें जहाँ कहीं

भी कोई प्राचीन शब्द दिखाई पड़ा है, हमने उसे स्वीकार कर लिया है। खगोलिकीय पिंडों के लिए हमें जब कोई प्राचीन शब्द नहीं मिला तो हमने अँग्रेजी शब्द को अपना लिया है। जहाँ कहीं प्राचीन शब्द उपलब्ध है भी, हमने विकल्प रूप से उसका संगत अँग्रेजी शब्द भी दे दिया है। जैसे—

acubens (canceri) — अकूबेन्स (कर्क)
delta (—andromeda) — डेल्टा (—चतुर्थ देवयानी)
kiffa borealis (librae) — किफ्फा बोरियैलिस (—द्वितीय तुला)
porrima (verginis) — पोरिमा (तृतीय कन्या)
shelyak — लि० (=लिप्यन्तरण)
sualocin — लि०

वक्रों और ठोसों के लिए जब कभी हमें कोई प्राचीन शब्द नहीं मिला तो हमने यथासाध्य एक नए उपयुक्त शब्द का निर्माण किया है। किन्तु जब कभी हमें यह भान हुआ है कि नया शब्द उक्त संकल्पना का ठीक-ठीक अर्थ नहीं देता तो हमने विकल्प रूप में अँग्रेजी शब्द दे दिया है। जैसे—

helix—कुण्डलिनी spiral—सर्पिल parabola—परवलय, लि० cone—शंकु, लि०
cylinder — बेलन, लि० sphere — गोला

सिलिण्डर के लिए प्राचीन शब्द "बेलन" है जो संस्कृत "वेल्लन" से निकला है। इस शब्द को 'सिलिण्डर' के लिए प्रयुक्त करने में एक कठिनाई है। मान लीजिए कि हम ऐसे ठोस का वर्णन कर रहे हैं जो बहुत-कुछ हमारे रसोईघर वाले बेलन के ही आकार का है। उसके बीच का भाग सिलिण्डराकार है और दोनों छोरों के भाग शंक्वाकार (conical) हैं, तो हमें इस प्रकार के वाक्य का प्रयोग करना पड़ेगा—

"एक बेलन के बीच का भाग बेलनाकार और सिरों के भाग शंक्वाकार हैं।" अतएव स्पष्ट है कि हम "सिलिण्डर" के लिए समस्त स्थानों पर "बेलन" का प्रयोग नहीं कर सकते।

उपकरणों के विषय में हमने यह नीति अपनाई है कि यदि किसी उपकरण का नाम देश में प्रचलित हो गया है तो हमने उसका अँग्रेजी नाम और हिन्दी पर्याय दोनों दे दिए हैं। जैसे—

thermometer—लि०, तापमापी barometer—लि०, वायुदाबमापी abaeus—लि०, गिन्तारा

अन्य प्रकार के उपकरणों के विषय में हमने यह नीति निर्धारित की है कि यदि किसी उपकरण का कोई सार्थक नाम है जो उपकरणों के किसी वर्ग को द्योतित करता है तो हमने उसका अनुवाद कर दिया है। किन्तु विशेषित उपकरणों के नाम हमने अँग्रेजी से ज्यों-के-त्यों लिए हैं। जैसे—

slide rule—लि० T-Square—लि० gyrostat —घूर्णाक्षस्थायी
magic lantern—चित्रप्रक्षेपी लालटेन theodolite—लि०

ऐसे उपकरणों के विषय में, जिनके नाम वर्णनात्मक हों, हमने दोनों सिद्धान्तों का समन्वय कर दिया है। जैसे—

diving well — विमज्जन कोष्ठ, लि०

manometer — दाबान्तरमापी, लि०

compass — दिक्सूचक, लि०

विषयों के नामों का हमने सर्वत्र अनुवाद किया है किन्तु हम यह चाहते हैं कि हमारे छात्र विभिन्न विषयों के अँग्रेजी नामों से भी परिचित रहें; ताकि यदि उन्हें कभी उक्त विषयों पर अँग्रेजी में दिए गए व्याख्यानों को सुनने का अवसर मिले तो वे कम से कम शीर्षकों का अर्थ अवश्य समझ लें। अतएव विकल्प रूप में हमने विषयों के अँग्रेजी नाम भी दे दिए हैं। जैसे—

Differential Calculus — अवकलन गणित, लि०

Commutative Algebra — क्रमविनिमय बीजगणित, लि०

Trigonometry — त्रिकोणमिति, लि०

किन्तु यहाँ एक अनुबन्ध लगा दिया गया है। वह यह कि भारतीय भाषाओं में पुस्तकें लिखने में सदैव विषयों के भारतीय नामों का ही प्रयोग किया जाय।

इस प्रकार वैज्ञानिक शब्दावली की समस्या बहुत कुछ हल हो चुकी है, और धीरे-धीरे हल होती जायगी।

तीसरा प्रश्न है पुस्तकों का। पुस्तकें आकाश से तो टपका नहीं करतीं। पुस्तकें बाजार में तभी आती हैं जब उनकी माँग होती है। जिस दिन से हमारे विश्वविद्यालयों ने हिन्दी में शिक्षा देना आरम्भ किया है उसी दिन से हिन्दी की पाठ्य पुस्तकों की माँग बढ़ती जा रही है। बनारस में तो मैं आएदिन देखता हूँ कि पुस्तक-विक्रेता हम लोगों के पास आते हैं और हमसे हिन्दी में पुस्तकें तैयार करने के लिए अनुरोध करते हैं। परन्तु पुस्तकों के अभाव में भी तो कई विश्वविद्यालयों ने हिन्दी में शिक्षा देनी आरम्भ कर दी है। हम लोग कक्षाओं में अँग्रेजी की पुस्तकों का ही उपयोग करते हैं परन्तु विद्यार्थी को समझाते हिन्दी में हैं। इसका एक दुष्परिणाम यह अवश्य ही निकला है कि विद्यार्थी ऐसी भाषा में उत्तर लिखते हैं जिसमें पारिभाषिक शब्द और संकेत अँग्रेजी के होते हैं, शेष शब्द हिन्दी के रहते हैं जैसे—

A B, C D पर Perpendicular है

यह मैं मानता हूँ कि यह स्थिति अवांछनीय है परन्तु यह दशा तो दस-पाँच वर्ष ही रहेगी, जब तक देशी भाषाओं में पुस्तकें तैयार नहीं होतीं। जब तक शिक्षा का माध्यम देशी भाषायें नहीं होतीं तब तक बाजार में देशी भाषाओं की पुस्तकों की माँग नहीं बढ़ेगी और जब तक माँग नहीं बढ़ेगी तब तक पुस्तकें तैयार नहीं होंगी। अतएव पुस्तकों की तैयारी के लिए भी यह आवश्यक है कि प्रादेशिक भाषाओं को शिक्षा का माध्यम बना दिया जाय।

बड़े हर्ष की बात है कि अब तक आर्ट्स के विषयों में तो बी० ए० तक की सभी शाखाओं में पुस्तकें प्रकाशित हो चुकी हैं। वैज्ञानिक विषयों में भी अधिकतर शाखाओं पर पुस्तकें उपलब्ध हैं, शेष शाखाओं में दो वर्ष के अन्दर उपलब्ध हो जायँगी, ऐसा विश्वास है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 1, January 1969, Pages 11-17

क्रियात्मक कलन सम्बन्धी कुछ प्रमेय

केo एसo सेवरिया,
गणित विभाग, गवर्नमेंट कालेज, अजमेर

[प्राप्त–नवम्बर 7, 1967]

सारांश

इस शोधपत्र का मुख्य उद्देश्य लैप्लास तथा बेसेल परिवर्तों की कुछ प्रमेयों को सिद्ध करना है और उनके व्यवहार द्वारा लारिसेला फलन F_c सम्बन्धी समाकलों का मान ज्ञात करना है।

Abstract

Some theorems on operational calculus. *By* K. S. Sevaria, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The object of this paper is to prove some theorems on Laplace and Bessel transforms and by using them we have evaluated integrals involving Lauricella's function F_c.

भूमिका :

किसी फलन $f(t)$ के लैप्लास, हैंकेल तथा माइजर परिवर्तों को

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

$$\psi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{1/2} J_\nu (pt) f(t)\, dt$$

तथा
$$\phi(p)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} p \int_0^\infty (pt)^{1/2} K_\lambda(pt) f(t)\, dt$$

पारिभाषित किया जाता है और उन्हें सांकेतिक रूप में क्रमश:

$\phi(p) \doteqdot f(t)$, $\psi(p) \underset{\nu}{\overset{J}{=}} f(t)$ तथा $\phi(p) \underset{\lambda}{\overset{K}{=}} f(t)$ द्वारा व्यक्त किया गया है।

प्रमेय 1.

यदि $\phi(p) \frac{\mathcal{J}}{\lambda} f(t)$

तथा $$\psi(p) \frac{K}{\nu} t^{\sigma-3} \mathcal{J}_{\rho}(bt) \prod_{i=1}^{r} [\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)] \phi(t)$$

तो $$\psi(p) = \frac{2^{\sigma-3/2} b^{\rho} p^{-\rho-\lambda-m-\sigma+3/2} \Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho+m\pm\nu)\} \prod_{i=1}^{r} (a_i^{\mu i})}{\pi^{1/2} \Gamma(1+\lambda)\Gamma(1+\rho) \prod_{i=1}^{r} [\Gamma(1+\mu_i)]}$$

$$\times \int_0^\infty t^{\lambda+1/2} F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda+m-\nu),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda+m+\nu)\ ;\ 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r$$

$$1+\rho,\ 1+\lambda\ ;\ -\frac{a_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{a_r^2}{p^2}, +\frac{b^2}{p^2}, -\frac{t^2}{p^2}\Big] f(t)\ dt \qquad (2\cdot1)$$

तभी हो सकता है जब समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ का हैंकेल परिवर्त

एवं $|t^{\sigma-3} \mathcal{J}_{\rho}(bt) \prod_{i=1}^{r} \Big[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)\Big] \phi(t)|$ का माइजर परिवर्त विद्यमान हों

तथा $p>0,\ m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i),\ a_i>0,\ i=1, \ldots, r,\ b>0.$

उपपत्ति :

$$\psi(p) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} p \int_0^\infty (pt)^{1/2}\, t^{\sigma-3} \mathcal{J}_{\rho}(bt) \prod_{i=1}^{r} \Big[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)\Big] K_{\nu}(pt)\, \phi(t)\, dt$$

किन्तु $$\phi(t) = t \int_0^\infty (tx)^{1/2} \mathcal{J}_{\lambda}(tx) f(x)\, dx$$

$\therefore$ $$\psi(p) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} p^{3/2} \int_0^\infty t^{\sigma-1} \prod_{i=1}^{r} \Big[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)\Big] \mathcal{J}_{\rho}(bt)\, K_{\nu}(pt)\, dt \int_0^\infty x^{1/2} \mathcal{J}_{\lambda}(tx) f(x)\, dx$$

समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$\psi(p) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} p^{3/2} \int_0^\infty x^{1/2} f(x)\, dx \int_0^\infty t^{\sigma-1} K_{\nu}(pt)\, \mathcal{J}_{\rho}(bt) \mathcal{J}_{\lambda}(xt) \prod_{i=1}^{r} \Big[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)\Big] dt$$

दाहिनी ओर सक्सेना के परिणाम [2] के अधार पर t समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1} K_\nu(pt)\, \mathcal{J}_\rho(bt) \mathcal{J}_\lambda((xt) \prod_{i=1}^{r} \Big[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)\Big] dt$$

$$=\frac{2^{\sigma-2}\, p^{-m-\rho-\lambda-\sigma} \Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda+m\pm\nu)\} \prod_{i=1}^{r} (a_i^{\mu i})\; b^\rho\; x^\lambda}{\Gamma(1+\rho)\; \Gamma(1+\lambda) \prod_{i=1}^{r} [\Gamma(1+\mu i)]}$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda+m-\nu),\, \tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda+m+\nu);\, 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r, \ldots, 1+\rho,$$

$$1+\lambda;\, -\frac{a_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{a_r^2}{p^2}, -\frac{b^2}{p^2}, -\frac{x^2}{p^2}\Big]$$

हमें (2.1) परिणाम की प्राप्ति होती है।

आगत समाकलों के पूर्ण अभिसरण के कारण इस प्रमेय के अन्तर्गत व्यक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम का विलोमन सम्भव है।

उदाहरण : कुछ संशोधन के साथ सक्सेना के परिणाम [2] को लेने पर

$$f(t)=t^{\lambda+1/2} F_c\Big[\tfrac{1}{2}(l+M+\lambda-\mu),\, \tfrac{1}{2}(l+M+\lambda-\mu)\;;\, 1+\nu_1, \ldots, 1+\nu_n, 1+\lambda\;;$$

$$-\frac{c_1^2}{a^2}, \ldots, -\frac{c_n^2}{a^2},\, -\frac{t^2}{a^2}\Big]$$

$$\frac{\mathcal{J}}{\lambda}\, \frac{a^{M+l+\lambda}\, \Gamma(1+\lambda)\, p^{l-1/2} K_\mu(ap) \prod_{j=1}^{n} \Big[\Gamma(1+\nu_j)\Big] \prod_{j=1}^{n} \Big[\, \mathcal{J}\nu_j(c_j p)\, \Big]}{2^{l-2}\, \Gamma\{\tfrac{1}{2}(l+M+\lambda\pm\mu)\} \prod_{j=1}^{n} (c_j^{\nu i})}$$

$$=\phi(p),\; R(\lambda+1)>0,\; R(l+M\pm\mu)>\tfrac{1}{2},\; p>0,\; a>0$$

$$M=\sum_{j=1}^{n} (\nu_j),\; c_j>0, j=1, \ldots, n$$

तो सक्सेना के परिणाम [2] को किंचित संशोधन के साथ प्रयुक्त करने पर

$$t^{\sigma-2}\, \mathcal{J}_\rho(bt) \prod_{i=1}^{r} \Big[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)\Big] \phi(t)$$

$$=\frac{a^{M+l+\lambda}\, t^{\sigma+l-7/2}\, \Gamma(1+\lambda)\, \mathcal{J}_\rho(bt)\, K_\nu(at) \prod_{i=1}^{r}}{2^{l-2}\, \Gamma\{\frac{1}{2}(l+M\lambda\pm\mu)\} \prod_{j=1}^{n} (c_j^{\nu j})} [\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)] \prod_{j=1}^{n} [\Gamma(1+\nu_j)] \prod_{j=1}^{n} [\mathcal{J}_{\nu j}(c\,t)]$$

$$\underset{\nu}{\overset{K}{=}} \frac{2^{\sigma-5/2}\, a^{M+l+\lambda}\, \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\{\frac{1}{2}(l+m+\lambda\pm\mu)\}} \left\{ \sum_{\mu,-\mu} \frac{\Gamma(-\mu)\, \Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\mu+\rho+\mathrm{m}+M+l-2\pm\nu)\} \prod_{i=1}^{r}(a_i^{\mu_i})\, b^\rho\, a^\mu}{\Gamma(1+\rho) \prod_{i=1}^{r} [\Gamma(1+\mu_i)]\, p^{l+m+M+\mu+\rho+\sigma-7/2}} \right.$$

$$\times F_c \Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\rho+m+M-\nu), \tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\rho+m+M+\nu)\,;\, 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r,$$

$$\left. 1+\nu_1, \ldots, 1+\nu_n, 1+\mu, 1+\rho\,;\, -\frac{a_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{a_r^2}{p^2}, -\frac{c_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{c_n^2}{p^2}, \frac{a^2}{p^2}, -\frac{b^2}{p^2} \Big] \right\}$$

$$=\psi(p),\ R(\sigma+m+M+\mu+\rho\pm\nu+l-2)>0,\ R(a+p)>|Im\ b|+\sum_{i=1}^{r}|Im\, a_i|+\sum_{j=1}^{n}|Im\, c_j|$$

प्रमेय का प्रयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^{2\lambda+1} F_c \Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda+m-\nu), \tfrac{1}{2}(\sigma+\rho+\lambda+m+\nu)\,;\, 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r, 1+\rho, 1+\lambda;$$

$$-\frac{a_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{a_r^2}{p^2}, -\frac{b^2}{p^2}, -\frac{t^2}{p^2} \Big] F_c \Big[\tfrac{1}{2}(l+M+\lambda-\mu), \tfrac{1}{2}(l+M+\lambda+\mu)\,;$$

$$1+\nu_1, \ldots, 1+\nu_n, 1+\lambda; -\frac{c_1^2}{a^2}, \ldots, -\frac{c_n^2}{a^2}, -\frac{t^2}{a^2} \Big] dt$$

$$= \frac{[\Gamma(1+\lambda)]^2}{2\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\rho+m\pm\nu)\}\, \Gamma\{\frac{1}{2}(l+M+\lambda\pm\mu)\}}$$

$$\sum_{\mu,-\mu} \frac{\Gamma(-\mu)\, \Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\mu+\rho+m+M+l-2\pm\nu)\}}{p^{M+\mu+l-2}\, a^{-M-l-\lambda-\mu}} F_c \Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\rho+m+M+l-2-\nu),$$

$$\tfrac{1}{2}(\sigma+\mu+\rho+m+M+l-2+\nu)\,;\, 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r, 1+\nu_1, \ldots, 1+\nu_n, 1+\mu, 1+\rho;$$

$$-\frac{a_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{a_r^2}{p^2}, -\frac{c_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{c_n^2}{p^2}, \frac{a^2}{p^2}, -\frac{b^2}{p^2} \Big]$$

की प्राप्ति होती है यदि

$$R(\lambda+1)>0, R(\sigma+\rho+m+l+M\pm\nu\pm\mu-2)>0,\ p>0,\ b>0,\ a>0,$$

$$a_i>0,\ i=1, \ldots, r,\ C_j>0, j=1, \ldots, n,\ m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i),\ M=\sum_{j=1}^{n}(\nu_j)$$

$a_i=0, i=1, \ldots, r$, $C_j=0, j=1, \ldots, n$, रखने पर हमें शर्मा द्वारा प्राप्त परिणाम [4, p. 111 (16)] प्राप्त होगा।

प्रमेय 2.

यदि $\phi(p) \doteqdot f(t)$

तथा $$\psi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} t^{\lambda-5/2} e^{-ct} \prod_{i=1}^{r} [\mathcal{J}\mu_i(a_i t)\ \phi(t)]\ \phi(t)$$

तो $$\psi(p)=\frac{p^{\nu+3/2}\ \Gamma(m+\lambda+\nu) \prod_{i=1}^{r}(a_i^{\mu_i})}{2^{m+\nu}\ \Gamma(1+\nu) \prod_{i=1}^{r}[\Gamma(1+\mu_i)]}$$

$$\times \int_0^\infty (t+c)^{-\lambda-\nu-m} F_C\Big[\tfrac{1}{2}(\lambda+m+\nu), \tfrac{1}{2}(\lambda+m+\nu+1); 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r, 1+\nu;$$

$$-\frac{a_1^2}{(t+c)^2}, \ldots, -\frac{a_r^2}{(t+c)^2}-\frac{p^2}{(t+c)^2}\Big] f(t)\ dt \qquad (2\cdot2)$$

तभी हो सकता है जब समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ का लैप्लास परिवर्त एवं

$|t^{\lambda-5/2} e^{-ct} \prod_{i=1}^{r} [\mathcal{J}\mu_i(a_i t)]\ \phi(t)|$ का माइजर परिवर्त विद्यमान हों तथा

$$p>0, a_i>0,\ i=1. \ldots, r,\ R(c)>0,\ m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i)$$

उपपत्ति :

$$\psi(p)=p \int_0^\infty (pt)^{1/2} e^{-ct}\ t^{\lambda-5/2} \prod_{i=1}^{r} [\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)]\ \mathcal{J}\nu(pt)\ \phi(t)\ dt$$

किन्तु $$\phi(t)=t\int_0^\infty e^{-tx} f((x)\ dx$$

$\therefore$ $$\psi(p)=p^{3/2}\int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-ct} \prod_{i=1}^{r} [\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)]\ \mathcal{J}\nu(pt)\ dt \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\ dx$$

समाकल के क्रम को बदलने पर

$$\psi(p)=p^{3/2}\int_0^\infty f(x)\,dx\int_0^\infty t^{\lambda-1}\,e^{-(x+c)t}\prod_{i=1}^{\tau}[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)]\,\mathcal{J}_\nu(pt)\,dt$$

दाहिनी ओर के समाकल का मान सक्सेना के परिणाम [2] की सहायता से निकालने पर तथा $\Gamma(2z)=\frac{2^{z-1}}{\pi^{1/2}}\Gamma(z)\,\Gamma(z+\frac{1}{2})$ का उपयोग करने पर (2·2) प्राप्त होगा।

उदाहरण : [1, p.278 (23)] को उदाहरण स्वरूप लेने पर

$$f(t)=\left(\frac{\pi}{2c}\right)^{1/2}(t^2+2ct)^{-1/2\rho-1/4}\,P_{\sigma-1/2}^{\rho+1/2}\left(1+\frac{t}{c}\right)$$

$$\doteqdot p^{\rho+1}\,e^{cp}\,K_\sigma(cp)$$

$$=\phi(p),\quad R(p)>0,\quad R(\rho)<\tfrac{1}{2},\ |\arg c|<\pi$$

हमें [2] की प्राप्ति होगी :

$$t^{\lambda-5/2}\,e^{-ct}\prod_{i=1}^{\tau}[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)]\,\phi(t)=t^{\lambda+\rho-3/2}\prod_{i=1}^{\tau}[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)]\,K_\sigma(ct)$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\frac{2^{\lambda+\rho-2}\,p^{\nu+3/2}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\rho+m+\nu\pm\sigma)\}\prod_{i=1}^{\tau}(a_i^{\mu_i})}{c^{\lambda+\rho+m+\nu}\,\Gamma(1+\nu)\prod_{i=1}^{\tau}[\Gamma(1+\mu_i)]}$$

$$\times F_c\left(\frac{\lambda+\rho+m+\nu-\sigma}{2},\ \frac{\lambda+\rho+m+\nu+\sigma}{2};\ 1+\mu_1,\ \ldots,\ 1+\mu_\tau,\ 1+\nu;\ -\frac{a^2}{c^2},\ \ldots,\ -\frac{a_\tau^2}{c^2},\ -\frac{p^2}{c^2}\right)$$

$$=\psi(p),\quad R(\lambda+\rho+m+\nu\pm\sigma)>0,\quad R(c)\sum_{i=1}^{\tau}|Im\,a_i|+|Im\,p|,\ m=\sum_{i=1}^{\tau}(\mu_i)$$

प्रमेय को व्यवहृत करने पर हमें

$$\int_0^\infty (t+c)^{-\lambda-\nu-m}\,(t^2+2ct)^{-1/2\,\rho-1/4}\,P_{\sigma-1/2}^{\rho+1/2}\left(1+\frac{t}{c}\right)$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\lambda+m+\nu),\ \tfrac{1}{2}(\lambda+m+\nu+1);\ 1+\mu_1,\ \ldots,\ 1+\mu_r,\ 1+\nu;$$

$$-\frac{a_1^2}{(t+c)^2},\ \ldots,\ -\frac{a_r^2}{(t+c)^2},\ -\frac{p^2}{(t+c)^2}\Big]\,dt$$

$$=\frac{2^{\lambda+\rho+m+\nu-3/2}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda+\rho+m+\nu\pm\sigma)\}}{\pi^{1/2}\,c^{\lambda+\rho+m+\nu-1/2}\,\Gamma(m+\lambda+\nu)}$$

$$\times F_c\Big(\frac{\lambda+\rho+m+\nu-\sigma}{2},\ \frac{\lambda+\rho+m+\nu+\sigma}{2};\ 1+\mu_1,\ \ldots,\ 1+\mu_r,\ 1+\nu;$$

$$-\frac{a_1^2}{c^2},\ \ldots,\ -\frac{a_r^2}{c^2},\ -\frac{p^2}{c^2}\Big)$$

प्राप्त होगा यदि

$$R(\lambda+\rho+m+\nu\pm\sigma)>0,\quad R(\rho)<\tfrac{1}{2},\quad p>0,\quad a_i>0,\quad i=1,\ \ldots,\ r,$$

$$R(c)>0,\ m=\sum_{i=1}^{r}\mu_i$$

$a_i=0,\ i=1,\ \ldots,\ n$ रखने पर हमें शर्मा द्वारा प्रस्तुत परिणाम [3] प्राप्त होगा ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral transforms, **भाग** 1, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.
2. सक्सेना, आर० के० । **मोनेटशेफ्टे फुर मैथ०**, 1966, **70**, 161–63.
3. शर्मा, के० सी० । **प्रोसी० ग्लास्गो०मैथ०एसो०**, 1957, **3** 111-18.
4. शर्मा, के० सी० । **वही**, 1963, **6**, 197-12.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No 1. January 1969, Pages 19-24

ϕ_m^q परिवर्त के प्रसार प्रमेय

ए० एन० गोयल

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—सितम्बर 18, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में शर्मा के ϕ_m^q परिवर्त के लिये 8 प्रसार प्रमेय दिये गये हैं।

Abstract

Expansion theorems of ϕ_m^q transform. *By* A. N. Goyal, Department of Mathematics, Rajasthan University, Jaipur.

In the present paper eight expansion theorems for the Sharma ϕ_m^q transform are given

1. शर्मा[1] ने ϕ_m^q परिवर्त को निम्नांकित समाकल समीकरण द्वारा पारिभाषित किया है :

$$\phi_m^q\left[f(x):p:\begin{matrix}at;\, \alpha_s\\ bi;\, \beta_j\end{matrix}\right]=\int_0^\infty e^{-1/4qpx}\, G^{4,\, q}_{m+q,\, m+q+2}\left(\frac{p^2x^2}{4}\middle|\begin{matrix}a_1,\, \ldots a_q;\; \alpha_1\, \ldots \alpha_m\\ b_1,\, \ldots b_4;\; \beta_1\, \ldots \beta_{m+q-2}\end{matrix}\right) f(x)dx \tag{1·0}$$

$$|\arg p| \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2},\, \frac{3-m\pi}{2}\right) \text{ तथा } x^{2bi}\, f(x)\epsilon\, !\, (O,\, R) \quad (A)$$

जहाँ $G^{m,\, n}_{p,\, q}\left(x\middle|\begin{matrix}a_r\\ b_s\end{matrix}\right)$ माइजर G-फलन है। उपर्युक्त समाकल तभी विद्यमान हो सकता है जब m तथा q ऐसी अनृणात्मक पूर्ण संख्यायें हों कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $q\geqslant 0$, $m+q \geqslant 2$ तथा (A)

हम (1·0) की दाहिनी दिशा को निम्नांकित प्रकार प्रदर्शित करेंगे

$$\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\; (\alpha_m)\\ (b_4);\; (\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$

जहाँ (a_q) द्वारा $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_q$, प्राचलों को प्रदर्शित किया गया है ।

2. उपपत्ति में निम्नांकित ज्ञात सूत्र की ग्रवश्यकता होगी

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2(1-m)}m^{mz-1/2}\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma(z+i/m),\ m \text{ धनात्मक पूर्णसंख्या है} \quad (1\cdot1)$$

$$\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left(\frac{a+r-i}{m}\right)=m^{-r}(a-m+1)_r\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left(\frac{a-i}{m}\right) \text{ रूप ग्रहण करेगा,} \quad (1\cdot2)$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा जहाँ $(a)_r$ ऋमगुणित फलन है जिसे

$$(a)_r=a(a+1)(a-2)\ldots\ldots(a+r-1) \quad (1\cdot3)$$

द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।

व्हिपल तथा गॉस (मैकराबर्ट[2]) के ग्रनुसार हमें निम्नांकित सूत्र प्राप्त होंगे

$$F\left(\begin{matrix}a, \frac{1}{2}a+1, \beta, \gamma\\ \frac{1}{2}a, a-\beta+1, a-\gamma+1\end{matrix}; -1\right)=\frac{\Gamma(a-\beta+1)\Gamma(a-\gamma+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(a-\beta-\gamma+1)} \quad (1\cdot4)$$

जहाँ $R(a-2\beta-2\gamma)>-2.$

$$F(a, b; c; 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)(\Gamma(c-b)},$$

जहाँ $R(c-a-b)>0,$ (1·5)

प्रमेय 1. यदि $R(a_m)<0$, m तथा q ऐसी ऋणात्मक पूर्णसंख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3, q\geqslant 0,$ $m+q\geqslant 2$, तथा प्रतिबन्ध (A),

तो

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a_q-a_m)_r}{r!\,\Gamma(a_q-a_1+1+r)}\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}a_1-r, a_2, \ldots a_q; (a_m)\\ (b_4); (\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a_m-a_1+1)}\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q); (a_{m-1}), a_q\\ (b_4); (\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \quad (1\cdot6)$$

उपपत्ति : (1·6) में बाईं ग्रोर (1·0) में से मान रखने पर G फलन को कंटूर समाकलन के रूप में व्यक्त करने पर, समाकलन का क्रम बदलने पर तथा संकलन करने पर सरल होकर

$$\int_0^{\infty}e^{-1/4qpx}f(x)dx\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{4}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-a_j+s)\,F\left(\begin{matrix}a_q-a_m, 1-a_1+s\\ a_q-a_1+1\end{matrix}; 1\right)}{\prod_{j=1}^{m+q-2}\Gamma(1-\beta_j+s)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j-s)\,\Gamma(a_q-a_1+1)}\left(\frac{p^2x^2}{4}\right)^s ds\right]$$

की प्राप्ति होगी। (1·5) का उपयोग करते हुये (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (1·6) की दाहिनी दिशा प्राप्त होगी।

प्रमेय 2. यदि $|h|<1$, m तथा q ऐसी ऋनृणात्मक पूर्णसंख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $q\geqslant 0$, $m+q\geqslant 2$ तथा प्रतिबन्ध (A),

तो

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-h)^r}{r!}\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_{m-r}\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)=(1-h)^{a_{m}-1}\phi\left(\frac{p^2}{4(1-h)}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_m)\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \quad (1\cdot7)$$

उपपत्ति : (1·7) के बाईं ओर (1·0) में से मान रखने पर समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, तथा सरल करने पर $F(1-a_m+s;\,h)=(1-h)^{a_m-1-s}$ का प्रयोग करने पर, तथा पुनः (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (1·7) की दाहिनी दिशा प्राप्त होती है।

प्रमेय 3. यदि $R(\lambda+2\beta_{m+q-2})<2$, m तथा q ऐसी ऋनृणात्मक पूर्णसंख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $q\geqslant 2$, $m+q\geqslant 2$ तथा (A), तो

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda(\frac{1}{2}\lambda+1)_r\,\Gamma(\lambda+r)(\beta_{m+q-2}-\lambda)_r(-1)^r}{(\frac{1}{2}\lambda)_r\Gamma(2\lambda-\beta_{m+q-2}+1+r)\;r!}\;\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_m)\\2\lambda+r,\,b_2,\,\ldots b_4;\,(\beta_{m+q-3})\end{matrix},\,\lambda-r\right)$$

$$=\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_m)\\2\lambda,\,b_2,\,\ldots b_4;\,(\beta_{m+q-3})\end{matrix},\,\lambda\right) \quad (1\cdot8)$$

उपपत्ति : (1·8) में बाईं ओर (1·0) में से मान रखने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, सरल करने से

$$\int_0^{\infty}e^{-1/4qpx}f(x)dx\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=2}^{4}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-a_j+s)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(2\lambda-s)\left(\frac{p^2x^2}{4}\right)^s}{\prod_{j=1}^{m+q-3}\Gamma(1-\beta_j+s)\prod_{j=1}^{m}(a_j-s)\Gamma(2\lambda-\beta_{m+q-2}+1)\Gamma(1-\lambda+s)}\right.$$

$$\left.\times F\left(\begin{matrix}\lambda,\,\frac{1}{2}\lambda+1,\,\beta_{m+q-2}-\lambda,\,2\lambda-s\\\frac{1}{2}\lambda,\,2\lambda-\beta_{m+q-2}+1,\,1-\lambda+s\end{matrix};\,-1\right)ds\right]$$

प्राप्त होता है। अब (1·4) का उपयोग करते हुये पुनः (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (1·8) की दाहिनी दिशा प्राप्त होती है।

प्रमेय 4. यदि $|h/\lambda|<1$, m तथा q ऐसी ऋनृणात्मक पूर्णसंख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $q\geqslant 0$, $m+q\geqslant 2$ तथा प्रतिबन्ध (A), तो

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-h)^r}{r!}\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}\triangle(\lambda,\,1-a+r),\,a_{\lambda+1},\cdots a_q;\,(a_m)\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2}\end{matrix}\right)$$

$$=\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{-b}\phi\left(\frac{p^2}{4(1+h/\lambda)^{\lambda}}\middle|\begin{matrix}\triangle(\lambda,1-a),a_{\lambda+1}\ldots a_q;(a_m)\\(b_4);(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \tag{1·9}$$

जहाँ $\triangle(\lambda, a)$ द्वारा $a/\lambda, \frac{a+1}{\lambda}, \frac{a+2}{\lambda} \ldots\ldots \frac{a+\lambda-1}{\lambda}$ तथा λ, प्राचल अभिव्यक्त होते हैं और r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं।

उपपत्ति : (1·9) में बाईं ओर (1·0) में से मान रखने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, (1·2) का उपयोग करने पर तथा सरल करने पर

$$\int_0^\infty e^{-1/4qpx}f(x)\,dx\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{4}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{k=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{a+K}{\lambda}+s\right)F(b+\lambda s;\,;-h/\lambda)}{\prod_{j=1}^{m+q-2}\Gamma(1-\beta_j+s)\prod_{j=1}^{m}(a_j-s)}\times\left(\frac{p^2x^2}{4}\right)^s ds\right]$$

प्राप्त होता है। $F(b+\lambda s;\,;-h/\lambda)=(1+h/\lambda)^{-b-\lambda s}$, का उपयोग करते हुये (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (1·9) की दाहिनी दिशा प्राप्त होती है।

प्रमेय 5. यदि n, r धनात्मक पूर्णसंख्यायें हैं, $R(a_m)<n+1$, m तथा q ऐसी अनृणात्मक पूर्ण-संख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $q\geqslant 0$, $m+q\geqslant 2$ तथा (A),

तो
$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}^nc_r(-1)^{n+r}}{\Gamma(1+b_1-a_m+r)}\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);(a_m)\\b_1+r,b_2,\ldots b_4;(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1+b_1-a_m+n)}\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);(a_{m-1}),a_m-n\\(b_4);(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \tag{2·0}$$

उपपत्ति : (2·0) में बाईं ओर (1·0) में से प्रतिस्थापित करने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर तथा सरल करने पर

$$\int_0^\infty e^{-1/4qpx}f(x)\,dx\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{4}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-a_j+s)(-1)^nF\left(\begin{matrix}-n,b_1-s\\1+b_1-a_m\end{matrix};1\right)\left(\frac{p^2x^2}{4}\right)^s ds}{\prod_{j=1}^{m+q-2}\Gamma(1-\beta_j+s)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j-s)\Gamma(1+b_1-a_m)}\right]$$

प्राप्त होता है। अब (1·5) को

$$\Gamma(1-a_m+s+n)[\Gamma(1-a_m+s)]^{-1}=(-1)^n\Gamma(a_m-s)[\Gamma(a_m-s-n)]^{-1}$$

के साथ उपयोग करने पर तथा (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (1·0) की दाहिनी दिशा प्राप्त होती है।

उपप्रमेय I. यदि $n=1$, तो उपर्युक्त प्रमेय से आवर्ती सम्बन्ध

$$(1+b_1-a_m)\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_m)\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)=\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_m)\\b_1+1,\,b_2,\,\ldots b_4;\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$
$$-\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_m-1\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \qquad (2\cdot1)$$

प्राप्त होगा।

प्रमेय 6. यदि n, r धनात्मक पूर्णसंख्याएँ हों, $R(b_1-a_m)<n$, m तथा q ऐसी अनृणात्मक पूर्ण संख्यायें हों कि $0\leqslant m\leqslant3$; $q\geqslant0$, $m+q\geqslant2$ तथा (A),

तो
$$\sum_{r=0}^{n} {}^nc_r(-1)^{n+r}\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_m+r\\b_1+r,\,b_2,\ldots b_4;\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(1-a_m+b_1)}{\Gamma(1+b_1-a_m-n)}\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_m+n\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \qquad (2\cdot2)$$

उपपत्ति : (2·2) में बाईं ओर (1·0) में से प्रतिस्थापित करने पर, समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर, (1·4) का उपयोग करके सरल करने तथा (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (2·2) की दाहिनी दिशा प्राप्त होती है।

उपप्रमेय I. यदि $n=1$, तो उपर्युक्त प्रमेय से आवर्ती सम्बन्ध

$$\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_m)\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)=\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_m+1\\b_1+1,\,b_2,\ldots\,b_4;\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$
$$-(b_1-a_m)\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_m+1\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \qquad (2\cdot3)$$

प्राप्त होगा।

प्रमेय 7. यदि n, r धनात्मक पूर्णसंख्यायें हों, m तथा q ऐसी अनृणात्मक पूर्णसंख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant3$, $q\geqslant0$, $m+q\geqslant2$ तथा (A), $R(a_m-\beta_{m+q-2})>-n$,

तो

$$\sum_{r=0}^{n} {}^nc_r\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_m+r\\(b_4);\,(\beta_{m+q-3}),\,\beta_{m+q-2}+r\end{matrix}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(a_m-\beta_{m+q-2}+n)}{\Gamma(a_m-\beta_{m+q-2})}\,\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\,(a_{m-1}),\,a_m+n\\(b_4);\,(\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right) \qquad (2\cdot4)$$

उपपत्ति : (2·4) में बाईं ओर (1·0) में से प्रतिस्थापित करने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, सरल करके (1·4) के साथ

$$[\Gamma(1-\beta_{m+q-2}-r+s)]^{-1}=(-1)^r(\beta_{m+q-2}-s)_r[\Gamma(1-\beta_{m+q-2}+s)]^{-1}$$

सम्बन्ध को व्यवहृत करने तथा (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (2·4) की दाहिनी दिशा प्राप्त होगी।

प्रमेय 8. यदि n, r घनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं, $R(\beta_{m+q-2}+n)>0$, m तथा q ऐसी अनृणात्मक पूर्ण संख्यायें हैं कि

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}^nc_r(-1)^{n+r}}{\Gamma(1-a_1+\beta_{m+q-2}+r)}\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}a_1-r,\ a_2,\ \ldots a_q;\ (a_m)\\(b_4);\ (\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-a_1+\beta_{m+q-2}+n)}\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\ (a_m)\\(b_4);\ (\beta_{m+q-3}),\ \beta_{m+q-2}+n\end{matrix}\right)\quad(2\cdot5)$$

उपपत्ति : (2·5) में बाईं ओर (1·0) में से प्रतिस्थापित करने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, (1·4) का व्यवहार

$$\Gamma(1-\beta_{m+q-2}+s-n)\Gamma(\beta_{m+q-2}-s+n)=(-1)^n\Gamma(\beta_{m+q-2}-s)\Gamma(1+s-\beta_{m+q-2})$$

सम्बन्ध के साथ करने तथा (1·0) की सहायता से विवेचना करने पर (2·5) की दाहिनी दिशा प्राप्त होती है। $n=1$ पर निम्नांकित रोचक उपप्रमेय प्राप्त होती है।

$$(1-a_1+\beta_{m+q-2})\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);\ (a_m)\\(b_4);\ (\beta_{m+q-2})\end{matrix}\right)$$

$$=\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}a_1-1,\ a_2,\ \ldots\ a_q;\ (a_m)\\(b_4);\ (a_{m+q-2})\end{matrix}\right)-\phi\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}(a_q);(a_m)\\(b_4);\ (\beta_{m+q-3}),\ (\beta_{m+q-2}+1\end{matrix}\right)$$

निर्देश

1. शर्मा, के० सी०। मैथ० जाइटश्र०, 1965, **89**, 94-97.
2. मैकराबर्ट, टी० एम०। Function of Complex variables. 1958, p. 368, 363.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 1, January 1969, Pages 25-30

H-फलन - IV

के० सी० गुप्ता,
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर
तथा
यू० सी० जैन
गणित विभाग, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर

[प्राप्त—नवम्बर 10, 1967]

सारांश

इस टिप्पणी में H फलन का सूत्र स्थापित किया गया है। राइट के सार्वीकृत बेसेल तथा हाइपर-ज्यामितीय फलनों के कुछ सूत्र तथा H फलन और माइजर के G फलन को सम्बन्धित करने वाला समान्य सूत्र हमारे द्वारा प्राप्त परिणाम की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

The H-function IV. *By* K. C. Gupta, Department of Mathematics, M. R. Engg. College, Jaipur, and U. C. Jain, Department of Mathematics, University of Udaipur, Udaipur.

The aim of this note is to establish a formula for the H-function. Certain formulae for Wright's generalized Bessel and hypergeometric functions as well as a general formula connecting the H-function and Meijer's G-function follow as particular cases of our result.

1. **H-फलन :** फाक्स [3, p 408] द्वारा प्रचलित H फलन को निम्नांकित प्रकार अंकित एवं पारिभाषित किया जावेगा

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \left|\begin{matrix}(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \ldots, (a_p, \alpha_p)\\(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \ldots, (b_q, \beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi)}\, x^{\xi}\, d\xi \tag{1.1}$$

जहाँ x शून्य के तुल्य नहीं है तथा रिक्त गुणनफल को इकाई के बराबर माना जावेगा; p, q, m, n ऐसी पूर्ण सख्यायें हैं कि $1 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$; $\alpha_j (j=1. \ldots, p)$, $\beta_j (j=1, \ldots, q)$, धनात्मक संख्यायें हैं तथा $a_j (j=1, \ldots, p)$, $b_j (j=1, \ldots, q)$ ऐसी संकीर्ण संख्यायें हैं कि $\Gamma(b_h - \beta_h \xi)(h=1, \ldots, m)$, का कोई भी पोल (pole) $\Gamma(1-a_i+\alpha_i \xi)(i=1, \ldots, n)$ से संगमित नहीं होता।

अर्थात्
$$\alpha_i(b_h+\nu) \neq (a_i-\eta-1) \tag{1.2}$$

$(\nu, \eta=0, 1 \ldots; h=1, \ldots, m; i=1, \ldots, n)$

साथ ही, कंटूर L $\sigma-i^\infty$ से $\sigma+i^\infty$ तक इस प्रकार प्रसरित है कि बिन्दु

$$\xi = \frac{(b_h+\nu)}{\beta_h}(h=1, \ldots, m; \nu=0, 1, \ldots;) \tag{1.3}$$

जो $\Gamma(b_h - \beta_h \xi)$ के पोल हैं वे L के दाहिनी ओर स्थित हैं और बिन्दु

$$\xi = \frac{(a_i-\eta-1)}{\alpha_i}(i=1, \ldots, n; \eta=0, 1, \ldots;) \tag{1.4}$$

जो $\Gamma(1-a_i+\alpha_i \xi)$ के पोल हैं वे बाईं ओर स्थित हैं। ऐसा कंटूर (1.1) के कारण सम्भव है। H फलन सम्बधी इन मान्यताओं पर पूरे शोधपत्र में अटल रहा जावेगा।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित सूत्र सिद्ध किया जावेगा

$$H^{m,\, n}_{n+r,\, m+k}\left[x \left| \begin{matrix}(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_u, \alpha_n), \ldots, (c_1, \gamma_1), \ldots, (c_r, \gamma_r) \\ (b_1, \beta_1), \ldots, (b_m, \beta_m), \ldots, (d_1, \delta_1), \ldots, (d_k, \delta_k)\end{matrix}\right.\right]$$
$$=(2\pi)^{1/2(m+n-k-r+K+R-M-N)}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} (N_j)^{1/2-a_j} \prod_{j=1}^{r} (R_j)^{1/2-c_j} \prod_{j=1}^{m} (M_j)^{b_j-1/2} \prod_{j-1}^{k} (K_j)^{d_j-1/2}$$

$$\times H^{M,\, N}_{N+R,\, M+K}\left[\frac{x\alpha\gamma}{\beta\delta} \left| \begin{matrix}\{(\triangle(N_n, a_n), (\alpha_n/N_n)\}, & \{(\triangle(R_r\, c_r), \gamma_r/R_r)\} \\ \{(\triangle(M_m, b_m), (\beta_m/M_m)\}, & \{(\triangle(K_r, d_k), \delta_k K_k)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{2.1}$$

जहाँ $M_1, \ldots, M_m$; $N_1 \ldots, N_n$; $K_1, \ldots, K_k$ तथा $R_1 \ldots, R_r$ धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं तथा

(i) $\sum_{j=1}^{m} (M_j)$, $\sum_{j=1}^{n} (N_j)$, $\sum_{j=1}^{k} (K_j)$ तथा $\sum_{j=1}^{r} (R_j)$ के लिये क्रमशः M, N, K, R

(ii) $\sum_{j=1}^{n} (N_j)\alpha_j$; $\sum_{j=1}^{m} (M_j)\beta_j$; $\sum_{j=1}^{r} (R_j)\gamma_j$; तथा $\sum_{j=1}^{k} (K_j)\delta_j$ के लिये क्रमशः $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

(iii) $\left(\triangle(M_m, b_m), \frac{\beta_m}{M_m}\right)$ M_m युग्मों के लिए

$$\left(\frac{b_m}{M_m}, \frac{\beta_m}{M_m}\right), \left(\frac{b_m+1}{M_m}, \frac{\beta_m}{M_m}\right), \ldots, \left(\frac{b_m+M_m-1}{M_m}, \frac{\beta_m}{M_m}\right)$$

(iv) तथा $\left\{\left(\triangle(M_m, b_m), \frac{\beta_m}{M_m}\right)\right\}$ M युग्मों के लिये

$$\left(\triangle(M_1, b_1), \frac{\beta_1}{M_1}\right), \left(\triangle(M_2\ b_2), \frac{\beta_2}{M_2}\right), \ldots, \left(\triangle(M_m, b_m), \frac{\beta_m}{M_m}\right)$$ लिखेंगे।

उपपत्ति : H-फलन की परिभाषा से

$$H^{m,\ n}_{n+r,\ m+k}\left[\ x \left|\begin{matrix}(a_1, a_1), \ldots, (a_n, a_n),\ (c_1, \gamma_1), \ldots, (c_r, \gamma_r) \\ (b_1, \beta_1), \ldots, (b_m, \beta_m)\ (d_1, \delta_1), \ldots, (d_k, \delta_k)\end{matrix}\right.\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j\xi) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+a_j\xi)}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma(1-d_j+\delta_i\xi) \prod_{j=1}^{r} \Gamma(c_j-\gamma_j\xi)} x^\xi\ dx \qquad (2.2)$$

प्राप्त होता है। गामा फलन [2 p. 4] के लिये गुणन सूत्र के बल पर हमें

$$\Gamma(b_j-\beta_j\xi) = \Gamma M_j\left(\frac{b_j}{M_j} - \frac{\beta_j}{M_j}\xi\right)$$

$$= (2\pi)^{1/2(1-M_j)} (M_j)^{b_j-1/2-\beta_j\xi} \prod_{i=0}^{Mj-1} \Gamma\left(\frac{b_j+i}{M_j} - \frac{\beta_j}{M_j}\xi\right)$$

प्राप्त होगा।

अत :

$$\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j\xi) = (2\pi)^{1/2(m-M)} \prod_{j=1}^{m} (M_j) b_j^{-1/2-\beta_j\xi})$$

$$\times \left[\prod_{j=0}^{M_1-1} \Gamma\left(\frac{b_1+i}{M_1} - \frac{\beta_1}{M_1}\xi\right)\right]\left[\prod_{i=0}^{M_2-1} \Gamma\left(\frac{b_2+i}{M_2} - \frac{\beta_2}{M_2}\xi\right)\right] \ldots \left[\prod_{i=0}^{M_m-1} \Gamma\left(\frac{b_m+i}{M_m} - \frac{\beta_m}{M_m}\right)\right]$$

ऊपर दी गई विधि के अनुसार हम

$$\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+a_j\xi), \prod_{j=1}^{k} \Gamma(1-d_j+\delta_j\xi), \text{ तथा } \prod_{j=1}^{r} \Gamma(c_j-\gamma_j\ \xi)$$

के भी मान प्राप्त करेंगे और इन मानों को (2.2) के समाकल्य में रखेंगे। इस प्रकार बने नवीन समाकल को (1.1) की सहायता से समझने पर हमें वांछित फल की प्राप्ति होगी।

3. (2.1) **की विशिष्ट दिशाएँ** : निम्नांकित श्रेणियों द्वारा व्यक्त फलनों की खोज राइट [5] द्वारा की गई :

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\nu+\mu r)}\frac{(-x)^r}{r!} \tag{A}$$

तथा

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j r)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\beta_j r)}\frac{(-x)^r}{r!} \tag{B}$$

हम इन फलनों को क्रमश :

$\mathcal{J}_{\nu}^{\mu}(x)$ तथा ${}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix};x\right]$ संकेतों द्वारा व्यक्त करेंगे और इन्हें राइट के सार्वीकृत बेसेल तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के नाम से पुकारेंगे। (A) तथा (B) श्रेणियों की तुलना ब्राक्स्मा द्वारा दिये गये H फलन की निम्नांकित श्रेणियों [1, p. 279] से करने पर

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\,\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_p)\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-\frac{\beta_j(b_h+r)}{\beta_h}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+\frac{\alpha_j(b_h+r)}{\beta_h}\right)(-1)^r x^{\frac{b_h+r}{\beta_h}}}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+\beta_j\frac{(b_h+r)}{\beta_h}\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j-\alpha_j\frac{(b_h+r)}{\beta_h}\right)r!\,\beta_h} \tag{3·1}$$

जहाँ $\sum_{j=1}^{m'}$ का तात्पर्य गुणकों के गुणनफल से है जिसमें $j=1,\ldots,j=m,\ j=h$;

हमें राइट के फलनों एवं H-फलन के मध्य निम्नांकित सम्बन्ध प्राप्त होते हैं

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\mu}(x)=H_{0,2}^{1,0}\left[x\,\middle|(0,1),(-\nu,\mu)\right] \tag{3·2}$$

$$\begin{aligned}&{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix};-x\right]\\&=H_{p,q+1}^{1,p}\left[x\,\middle|\begin{matrix}(1-a_1,\alpha_1),\ldots,(1-a_p,\alpha_p)\\(0,1),(1-b_1,\beta_1)\ldots,(1-b_q,\beta_q)\end{matrix}\right]\end{aligned} \tag{3·3}$$

(2.1) में प्राचलों के विशिष्टीकरण पर (3.2) तथा (3.3) सम्बन्धों के बल पर हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होते है :

(a)
$$\mathcal{J}_{\nu}^{\mu}(x)=(2\pi)^{1/2(K_1-M_1)}\ M_1^{-1/2}\ K_1^{-\nu-1/2}$$

$$\times H_{0,\ M_1+K_1}^{M_1,\ 0}\left[\frac{x}{M_1K_1\mu}\left(\triangle(M_1,0),\frac{1}{M_1}\right),\ \left(\triangle(K_1,-\nu),\frac{\mu}{K_1}\right)\right] \qquad (3\cdot4)$$

जहाँ M_1 तथा K_1 धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं तथा (3·4) के बाईं ओर के शेष संकेतों को समीकरण (2·1) के अन्तर्गत (iii) में दिये गये संकेतों से समझा जा सकता है।

(b)
$${}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ \ldots,\ (a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ \ldots,\ (b_q,\beta_q)\end{matrix};\ -x\right]=(2\pi)^{1/2(p-P+Q-q)}$$

$$\times\prod_{j=1}^{p}(P_j)^{a_j-1/2}\prod_{j=1}^{q}(Q_j)^{1/2-b_j}\ {}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\{(\triangle(P_p,a_p),\ \alpha_p/P_p)\}\\\{(\triangle(Q_q,b_q),\beta_q/Q_q)\}\end{matrix};\ \frac{-x\prod_{j=1}^{p}(P_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^{q}(Q_j)^{\beta_j}}\right] \qquad (3\cdot5)$$

जहाँ $P_1, \ldots, P_p$ तथा $Q_1, \ldots, Q_q$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं; P तथा Q क्रमशः $\sum_{j=1}^{p}(P_j)$, $\sum_{j=1}^{q}(Q_j)$ के लिये प्रयुक्त हैं और शेष संकेतों का अर्थ (2.1) के अन्तर्गत (iii) तथा (iv) में आये संकेतों से निकाला जा सकता है।

(c) यदि हम मान लें कि (2·1) में $\alpha_1=N_1$, $\alpha_2=N_2$, ..., $\alpha_n=N_m$; $\beta_1=M_1$, $\beta_2=M_2$,..., $B_m=M_m$; $\gamma_1=R_1$, $\gamma_2=R_2$...., $\gamma_r=R_r$; $\delta_1=K_1$, $\delta_2=K_2$, ..., $\delta_k=K_k$ तो लेखक [4] द्वारा प्राप्त ऐसे परिणाम की प्राप्ति होगी जो H फलन तथा माइजर के G फलन को सम्बन्धित करता है

$$H_{n+r,\ m+k}^{m,\ n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,N_1),\ \ldots,\ (a_n,N_n),\ (c_1,R_1),\ \ldots,\ (c_r,R_r)\\(b_1,M_1),\ \ldots,\ (b_m,M_m),\ (d_1,K_1),\ \ldots,\ (d_k,K_k)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=(2\pi)^{1/2(m+n-k-r+K+R-M-N)}$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}(N_j)^{1/2-a_j}\prod_{j=1}^{r}(R_j)^{1/2-c_j}\prod_{j=1}^{m}(M_j)^{b_j-1/2}\prod_{j=1}^{k}(K_j)^{d_j-1/2}$$

$$\times G_{N+R,\ M+k}^{M,\ N}\left[\frac{x\prod_{j=1}^{n}(N_j)^{N_j}\prod_{j=1}^{r}(R_j)^{R_j}}{\prod_{1}^{m}(M_j)^{M_j}\prod_{1}^{k}(K_j)^{k_j}}\left|\begin{matrix}\{\triangle(N_n,a_n)\},\ \{\triangle(R_r,c_r)\}\\\{\triangle(M_m,b_m)\},\{\triangle(K_k,d_k)\}\end{matrix}\right.\right] \qquad (3\cdot6)$$

जहाँ

(i) $\triangle(M_m, b_m)$ का प्रयोग

$$\frac{b_m}{M_m}, \frac{b_m+1}{M_m}, \ldots, \frac{b_m+M_m-1}{M_m}$$ प्राचलों के लिये

(ii) $\{\triangle(M_m, b_m)\}$ का प्रयोग

$\triangle(M_1, b_1), \triangle(M_2, b_2), \ldots, \triangle(M_m, b_m)$, के लिये हुआ है।

(3.6) में दिये गये शेष संकेतों का वही अर्थ एवं वही सीमायें हैं जो (2.1) में दी हैं।

निर्देश

1. ब्राक्स्मा, बी॰ जे॰ एल॰। Compos. Maths. 1963, **15**, 279.
2. एर्डेल्यी, ए॰ तथा अन्य। Higher Transcendental function, **भाग** 1, **मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1953, **पृ॰** 4, 207.
3. फाक्स, सी॰। **ट्रांजे॰ अमे॰ मैथ॰ सोसा॰**, 1961, **98,** 408.
4. गुप्ता, के॰ सी॰ तथा जैन, यू॰ सी॰। **प्रोसी॰ नेश॰ एके॰ साइंस (इंडिया) में प्रकाशनार्थ स्वीकृत।**
5. राइट, ई॰ एन॰। **प्रोसी॰ लन्दन मैथ॰ सोसा॰**, 1935, **38**, 257.
6. वही। **जर्न॰ लन्दन मैथ॰ सोसा॰**, 1935, **10**, 287.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 1, January, 1969, Pages 31-33

5-सल्फोसैलिसिलिक अम्ल द्वारा निर्मित नीले परक्रोमेट के पी-एच का अध्ययन

बी० उपाध्याय,

रसायन विभाग, सतीशचन्द्र कालेज, बलिया

[प्राप्त–मार्च 21, 1968]

सारांश

5-सल्फोसैलिसिलिक अम्ल के द्वारा तैयार किये गये ईथरीय नीले परक्रोमेट का पी–एच मापन जल में इसके विघटन के विभिन्न समयान्तरों पर किया गया। यह स्पष्टतः ज्ञात हुआ कि ईथरीय नीला यौगिक एवं जल में इसके अपघटन से प्राप्त उत्पाद क्रमशः क्रोमियम परक्रोमेट तथा क्रोमियम डाइक्रोमेट हैं।

Abstract

Study of pH of blue perchromate prepared with 5-sulphosalicylic acid. *By* B. Upadhyay, Department of Chemistry, Satish Chandra College, Ballia.

The pH of ethereal blue perchrmoate prepared with 5-sulphosalicylic acid has been measured during its decomposition in water at different time intervals and its water decomposition product at different dilutions. It is clear from the observations that ethereal blue compound and its water decomposition product in water are chromium perchromate and chromium dichromate respectively.

बैरेस्विल[1] तथा रीजेनफेल्ड[2] ने पोटैशियम डाइक्रोमेट तथा हाइड्रोजन पराँक्साइड के अम्लीकृत विलयन के तैयार किये गये नीले यौगिक को अम्लीय प्रकृति का बताया। श्वार्ज तथा गीज[3] ने नीले यौगिक के लिये CrO_5 सूत्र प्रदान किया जिसकी प्रकृति पराक्साइडीय है और इसके विघटन उत्पाद का सूत्र CrO_3 है। इधर राय[4] ने अम्लीय तथा पराक्साइड प्रकृति का निराकरण किया है और इसके लिये $Cr_2(Cr_2O_{10})_3$ सूत्र प्रस्तावित करते हुये अन्य पर-लवणों की तुलना में इसका नाम क्रोमियम परक्रोमेट रखा है। उन्होंने यह भी प्रस्तावित किया है कि जल में इसका विघटन-उत्पाद क्रोमियम डाइक्रोमेट $Cr_2(Cr_2O_7)_3$ होगा।

विभिन अवस्था के अन्तर्गत ईथरीय नीले यौगिक के विघटन के समय पी-एच मापन सम्बन्धी यथेष्ट आँकडे प्राप्त नहीं हैं फलतः यह उचित समझा गया कि 5-सल्फोसैलिसिलिक अम्ल के द्वारा तैयार

किये गये ईथरीय नीले परक्रोमेट के जल में विघटन के विभिन्न कालान्तरों पर पी-एच का अध्ययन किया जाय। साथ ही जल में अपघटन उत्पाद के पी-एच का भी अध्ययन विभिन्न सान्द्रताओं पर किया जाय जिससे इस यौगिक की विवादग्रस्त प्रकृति एवं सही सूत्र की सम्पुष्टि की जा सके। 5-सल्फोसैलिसिलिक अम्ल H^+ तथा जटिल निर्मायक सल्फोसैलिसिलेट आयन (Su'') दोनों ही प्रदान कर सकता है।

प्रयोगात्मक

सभी प्रयुक्त रसायन वैश्लेषिक कोटि के थे और उन्हें मिश्रित करने के पूर्व ठंडा कर लिया गया। ईथरीय नीले परक्रोमेट के विघटन के लिये चालकता-जल का प्रयोग किया गया।

ईथरीय नीला परक्रोमेट तैयार करने के लिये 20 मिली० पोटैशियम डाइक्रोमेट, 0·4 N सल्फो-सैलिसिलिक अम्ल (250 मिली०), ईथर (60 मिली०) तथा 10 आयतन वाले हाइड्रोजन पराक्साइड (5 मिली०) को मिलाया गया। ईथरीय तह को पृथक करके उसे हिमशीतल जल से कई बार (4–5 बार) धोया गया जिससे अशुद्धियाँ दूर हो जायँ। अन्त में इसे हिमशीतित्र में 2–3 घंटे तक रखा गया जिससे यदि कोई जल शेष हो तो वह जम जाये।

पी-एच मापन:—20 मिली० नीले परक्रोमेट को 25 मिली० चालकता-जल के साथ मिलाया गया। इसके पूर्व चालकता-जल का पी-एच ज्ञात पर किया जा चुका था। विभिन्न समयान्तरों पर जो परिवर्तन हुये उन्हें तब तक अंकित किया गया जब तक नीला परक्रोमेट पूर्णतया विघटित (पीला) नहीं हो गया। विभिन्न तनुताओं पर जल में विघटन उत्पाद के पी-एच परिवर्तनों को भी मापा गया। इन मापनों के लिये फिलिप्स पी० आर० 9400 पी-एच मापी उपयोग में लाया गया। प्राप्त परिणाम सारणी-1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

ताप=30°C, 5 मिली० नीले परक्रोमेट के लिये 6·25 मिली० $N/300$ सोडियम थायोसल्फेट लगा

समय, मिनट में	विघटन के समय जल का pH	जल की विद्युत चालकता	जल में pH
00	6·900	0	3·350
6	4·100	5	3·450
10	3·900	10	3·450
20	3·750	15	3·500
30	3·650	20	3·575
50	3·500	25	3·625
60	3·425	30	3·675
75	3·404	40	3·725
90	3·375	50	3·800
115	3·350	60	3·850
120	3·350	75	3·975
		100	4·000
			4·100

विवेचना

विघटन के समय जल के पी-एच मान 3·35 तथा 4·10 के मध्य पाये गये जो कि डाइक्रोमेट विलयन के लिये बाबटेल्सकी इत्यादि [5] द्वारा प्रस्तावित मान, 4·500, के निकट हैं। यदि विलयन में क्रोमिक अम्ल होता तो ये मान और न्यून होते और तनूकरण पर पी-एच मानों में ऐसा अन्तर नहीं देखा जाता (हार्टफोर्ड [6] के अनुसार)। जब जल विघटन उत्पाद को चालकता-जल द्वारा तन्वित कर दिया जाता है तो पी-एच काफी बदल जाता है। यह हार्टफोर्ड के प्रेक्षणों के विपरीत है। फलतः ईथरीय नीला यौगिक न तो अम्लीय हो सकता है और न जल विघटन उत्पाद क्रोमिक अम्ल हो सकता है। यह डाइक्रोमेट विलयन है जैसा कि राय [4] ने प्रस्तावित किया है।

पी-एच का परास (3·35–4·18) आश्चर्यजनक नहीं है क्योंकि यूमुरा तथा स्यूडा [7] ने यह देखा है कि क्रोमियम के जटिल तथा क्लोरीन प्रतिस्थापित ऐमीनों का पी-एच $\frac{1}{300}$ से $\frac{1}{500}$ आणुक सान्द्रता पर 3–4 के परास में होता है।

अतः यह निष्कर्ष निकाला गया कि 5-सल्फोसैलिसिलिक अम्ल द्वारा तैयार किये गये ईथरीय नीले यौगिक एवं उसके जलविघटन-उत्पाद क्रमशः क्रोमियम परक्रोमेट तथा क्रोमियम डाइक्रोमेट हैं जिनके संघटन क्रमशः $(Cr\,Su)_3\,[Cr\,(Cr_2\,O_{10})_3]$ तथा $(Cr\,Su)_3\,[Cr\,(Cr_2\,O_7)_3$ होंगे[8]। ये राय[4] द्वारा प्रस्तावित नीले परक्रोमेट के सूत्र $Cr_2\,(Cr_2\,O_{10})_3$ की समता पर निर्दिष्ट किये गये हैं। इस प्रकार पी-एच मापनों के आधार पर यह कहना तर्कसंगत होगा कि नीला यौगिक CrO_5 न होकर क्रोमियम परक्रोमेट $Cr_2(Cr_2O_{10})_3$ है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विद्यालय के प्राधानाचार्य श्री पारस नाथ का आभारी है जिन्होंने सुविधायें प्रदान कीं।

निर्देश

1. बैरेस्विल, सी० एल० ए०। **एना० किम० फिजि०** 1848, **20**, 364.
2. रीजेनफेल्ड, ई० एच०। **बेरि० दवाश० केम०**, 1905, **38**, 4068.
3. श्वार्ज, आर० तथा गीज़, एच०। वही, 1932, **65 बी**, 871.
4. राय, आर० सी०। **डी० एस-सी० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यलय,** 1962.
5. बाबटेल्स्की, एम०, ग्लास्नर, ए० तथा चैकिन, एल०। **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1945, **67**, 966.
6. हार्टफोर्ड, डब्लू० एच०। **इंड० इंजी० केमि० (एनालि०)**, 1942, **14**, 174.
7. यूमुरा, आई० टी० तथा स्यूडा, एम०। **बुले० फैकल्टा मेटियर्स**, 1935, **4**, 29.
8. उपाध्याय, वी०। **बुले० केमि० सोसा० जापान में प्रकाशनार्थ प्रेषित।**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 1, No. 1, January 1969, Pages 35-40

दो चरों वाले माइजर-लैपलास परिवर्त की शृंखला

एन० सी० जैन

गणित विभाग, श्री जी० एस० टक्नालाजिकल इंस्टीच्यूट, इंदौर

[प्राप्त—नवम्बर 7,1967]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में दो चरों वाले माइजर-लैपलास परिवर्त की शृंखला प्राप्त की गयी है जो अन्य परिवर्तों के रूप में रोचक परिणाम प्रदान करती है।

Abstract

On chains of Meijer-Laplace transform of two variables. *By* N. C. Jain, Department of Mathematics, Shri G.S. Technological Institute, Indore.

In this paper we have obtained a chain of Meijer-Laplace transform of two variables which yield interesting results in other transforms to which it reduces.

1. **भूमिका :** समाकल समीकरण द्वारा माइजर-लैप्लास परिवर्त की परिभाषा [2, p. 57] निम्नांकित रूप में की जाती है

$$F(p)=p\int_0^\infty G^{m+1,\,0}_{m,\,m+1}\left(px\,\Big|\,\begin{matrix}\xi_1+\alpha_1,\,\ldots,\,\xi_m+\alpha_m\\ \xi_1,\,\ldots,\,\xi_{m+1}\end{matrix}\right)f(x)\,dx,\quad R(p)>0. \tag{1·1}$$

लेखक [4] ने दो चरों वाले माइजर-लैपलास परिवर्त को

$$F(p,q)=pq\int_0^\infty\!\!\int^* G^{m+1,\,0}_{m,\,m+1}\left(px\,\Big|\,\begin{matrix}\xi_1+\alpha,\,\ldots,\,\xi_m+\alpha_m\\ \xi_1,\ldots,\,\xi_{m+1}\end{matrix}\right)\times$$
$$G^{n+1,\,0}_{n,\,n+1}\left(qy\,\Big|\,\begin{matrix}\eta_1+\beta_1,\ldots,\eta_n+\beta_n\\ \eta_1;\,\ldots,\,\eta_{n+1}\end{matrix}\right)f(x,y)\,dx\,dy,$$
$$R^*(p,q)>0. \tag{1·2}$$

---

*संक्षेपण की दृष्टि से $\int_0^\infty\!\int$ संकेत द्वारा $\int_0^\infty\!\int_0^\infty$ को तथा $R(p,q)>0$ संकेत द्वारा $R(p)>0$, $R(q)>0$ को अंकित किया गया है।

रूप में प्रचलित किया है। हम इस समाकल समीकरण को निम्न प्रकार से अंकित करेंगे।

$$F(p, q)=G[f(x, y)].$$

यदि

$$a_j=0,\ j=1, 2, \ldots, (m-1);\ \beta_j=0,\ j=1, 2, \ldots, (n-1)$$

तथा

(a) $a_m=\xi_{m+1}=0;\quad \beta_n=\eta_{n+1}=0,\ G_{0,1}^{1,0}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}-\\0\end{matrix}\right)=e^{-z}$, का प्रयोग करें

तो (1·2) से

$$F(p, q)=\int_0^\infty\!\!\int e^{-px-qy} f(x,y)\,dx\,dy,\quad R(p, q)>0, \tag{1·3}$$

प्राप्त होगा जिसे संकेत रूप में

$$F(p, q)\doteqdot f(x, y)$$

द्वारा प्रदर्शित करेंगे और यह दो चरों वाले [3, p. 39] लैपलास परिवर्त के नाम से ज्ञात है।

(b) $a_m=-m-k,\ \xi_m=m-k, \xi_{m+1}=-m-k;\ \beta_n=-m_1-k_1$

$\eta_n=m_1-k_1,\ \eta_{n+1}=-m_1-k_1$

तो (1·2) से

$$F(p, q)=pq\int_0^\infty\!\!\int e^{-1/2px-1/2qy}\,(px)^{-k-1/2}\,(qy)^{-k_1-1/2}W_{k+1/2, m}(px)W_{k_1+1/2, m}(qy)\,f(x,y)\,dx\,dy,\quad R(p, q)>0, \tag{1·4}$$

प्राप्त होगा और यह दो चरों वाले [5, p. 83] माइजर परिवर्त के नाम से ज्ञात है।

(c) $\xi_m=2m,\ a_m=\frac{1}{2}-m-k,\ \xi_{m+1}=0;\ \eta_n=2m_1,\ \beta_n=\frac{1}{2}-m_1-k_1,\ \eta_{n+1}=0,$

तो (1·2) से

$$F(p, q)=pq\int_0^\infty\!\!\int e^{-1/2px-1/2qy}(px)^{m-1/2}(qy)^{m_1-1/2}W_{k,m}(px)\,W_{k_1, m_1}(qy)\,f(x,y)\,dx\,dy,\quad R(p, q)>0, \tag{1·5}$$

प्राप्त होगा जिसे हम दो चरों वाला वर्मा-परिवर्त [6] कहेंगे।

इस टिप्पणी में हमने दो चरों वाले माइजर-लैपलास परिवर्त की श्रृंखला प्राप्त की है जिससे अन्य परिवर्तों से सम्बन्धित रोचक परिणाम प्राप्त हुए हैं।

2. हमें निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी जो सक्सेना [7, p. 401] द्वारा दिये गये परिणामों का अनुसरण करते हैं।

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}\, G_{q,\,r}^{h,\,l}\left(pt\,\middle|\begin{matrix}a_1,\,\ldots,\,a_q\\ \beta_1,\,\ldots,\,\beta_r\end{matrix}\right)\; G_{\nu,\,\delta}^{\alpha,\,\beta}\left(zt^n\,\middle|\begin{matrix}a_1,\,\ldots,\,a_\nu\\ b_1,\,\ldots,\,b_\delta\end{matrix}\right)dt$$

$$=p^{-\sigma}(2\pi)^{(1-n)(h+l-1/2q-1/2r)}\; n^{\sum\limits_{r=1}^{r}\beta_i-\sum\limits_{r=1}^{q}a_i+(\sigma-\frac{1}{2})(r-q)}$$

$$\times G_{\nu+nr,\;\delta+nq}^{\alpha+nl,\;\beta+nh}\left(\frac{z}{p^n n^{n(q-r)}}\,\middle|\begin{matrix}a_1,\,\ldots,\,a_\beta,\,\triangle(n,-\beta_1-\sigma+1),\,\ldots,\,\triangle(n,-\beta_r-\sigma+1),\,a_{\beta+1},\,\ldots,\,a_\nu\\ b_1,\,\ldots,\,b_\alpha,\,\triangle(n,-a_1-\sigma+1),\,\ldots,\,\triangle(n,-a_q-\sigma+1),\,b_{\alpha+1},\,\ldots,\,b_\delta\end{matrix}\right) \tag{2·1}$$

यदि $R(p)>0,\ 0\leqslant nq\leqslant nr<nq+\delta-\nu\ ;\ q+r<2h\leqslant 2r\ ;\ 0\leqslant\beta\leqslant\nu\ ;\ 1\leqslant\alpha\leqslant\delta\ ;\ l=0,$ $R(\min\,\beta_i+n\min\,b_j)>R(-\sigma),$

$$i=1,2,\ldots,h,\quad j=1,2,\ldots,\alpha\ ;\quad |\arg p|<(h+l-\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}r)\pi,\quad \arg z$$

कोई भी मान ग्रहण करे ।

$$G_{2\alpha,\,0}^{0,\,2\alpha}\left(\frac{2\alpha}{ps}\right)^{2\alpha}\Big/\triangle(2\alpha,\,2\alpha)\ \Big)=2^{3\alpha-2}\,\pi^{\alpha-1/2}\,\alpha^{2\alpha-3/2}(ps)^{1-2\alpha}\,e^{-ps}, \tag{2·2}$$

जहाँ α धनात्मक पूर्ण संख्या है ।

पूरे निवन्ध में $\triangle(n,\theta)$ संकेत का प्रयोग $\frac{\theta}{n},\frac{\theta+1}{n},\ldots,\frac{\theta+n-1}{n}$, प्राचल-समुच्चय को व्यक्त करने के लिए हुआ है जिसमें n धनात्मक पूर्ण संख्या है; $\triangle(n,\theta_r)$ संकेत द्वारा $\triangle(n,\theta_1),\ \triangle(n,\theta_2),\ \ldots\ldots,\ \triangle(n,\theta_r)$ प्राचल-समुच्चय का बोध होता है तथा (θ_r) संकेत द्वारा $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r$ प्राचल-समुच्चय का ।

3. प्रमेय : यदि

$$F_1(p,q)=G[f(x,y)], \tag{3·1}$$

$$F_2(p,q)=G\left[(xy)^{-1/2}\,F_1\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)\right] \tag{3·2}$$

$$F_3(p,q)=G\left[\frac{4(xy)^{1/2}}{\pi}\,F_2\left(\frac{1}{4x^2},\frac{1}{4y^2}\right)\right], \tag{3·3}$$

$$F_4(p,q)=G\left[\frac{4(xy)^{1/2}}{\pi}\,F_3\left(\frac{1}{4x^2},\frac{1}{4y^2}\right)\right], \tag{3·4}$$

....

....

$$E_r(p,q)=G\left[\frac{4(xy)^{1/2}}{\pi}F_{r-1}\left(\frac{1}{4x^2},\frac{1}{4y^2}\right)\right], \tag{3·5}$$

तो

$$F_r\left(\frac{p^2}{4},\frac{q^2}{4}\right)=2^{3r+2\alpha-4r\alpha-4}\,\pi^{2-2\alpha}\prod_{r=2}^{r}\left[a^{\xi_{m+1}+\eta_{n+1}-\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i}\right](pq)^{2\alpha+1} \tag{3·6}$$

$$\times\int_0^\infty\int G^{0,\,2\alpha(m+1)}_{2\alpha(m+1),\,2\alpha m}\left[\left(\frac{2\alpha}{ps}\right)^{2\alpha}\Bigg/\begin{matrix}(1-\xi_{m+1}),\ \triangle(1,-\xi_{m+1}+\frac{3}{2}),\ldots,\ \triangle\left(\alpha,-\xi_{m+1}+\left(\frac{2\alpha+1}{2}\right)\right)\\ \triangle\left(\alpha,-\xi_m-a_m+\left(\frac{2\alpha+1}{2}\right)\right),\ldots,\ \triangle(1,-\xi_m-a_m+\frac{3}{2}),\ (1-\xi_m-a_m)\end{matrix}\right]$$

$$\times G^{0,\,2\alpha(n+1)}_{2\alpha(n+1),\,2\alpha m}\left[\left(\frac{2\alpha}{qt}\right)^{2\alpha}\Bigg/\begin{matrix}(1-\eta_{n+1}),\ \triangle(1-\eta_{n+1}+\frac{3}{2}),\ \ldots,\ \triangle\left(\alpha,-\eta_{n+1}+\frac{2\alpha+1}{2}\right)\\ \triangle\left(\alpha,-\eta_n-\beta_n+\frac{2\alpha+1}{2}\right),\ldots,\ \triangle(1,-\eta_n-\beta_n+\frac{3}{2}),(1-\eta-\beta_n)\end{matrix}\right]$$

$$\times(st)^{2\alpha-1}f(s^{2\alpha},\ t^{2\alpha})\ ds\ dt,$$

यदि $R(p,q)>0$, $|f(x^{2^{n-1}},y^{2^{n-1}})|$, $n=1,2,\ldots,r$, का माइजर-लैपलास परिवर्त सभी विद्यमान हों तथा प्रयुक्त समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी हों। यहाँ α द्वारा 2^{r-2} तथा $\prod_{r=2}^{r}$ द्वारा कोष्ट के भीतर खंडों का गुणनफल का बोध होता है, ($r=2$ के लिए जहाँ r का मान कोई पूर्ण संख्या हो सकती है)।

उपपत्ति :

(3·2) में (3·1) से $F_1(1/x)$ का मान प्रतिस्थापित करने पर, [1, p. 209,(9)] का प्रयोग करने पर, द्विगुण समाकलन का क्रम बदल देने पर (जो द्विगुण समाकलों के पूर्णरूपेण अभिसरण के कारण न्यायसंगत है) तथा (2·1) की सहायता से बाद के द्विगुण समाकल का मान निकालने पर, p के स्थान पर $(p^2/4)$, q के स्थान पर $(q^2/4)$ रखने पर तथा S के स्थान पर S^2 तथा t के स्थान पर t^2 रखने पर हमें

$$F_2\left(\frac{p^2}{4},\frac{q^2}{4}\right)=\frac{p^3q^3}{2^4}\int_0^\infty\int G^{0,\,2(m+1)}_{2(m+1),\,2m}\left[\left(\frac{2}{ps}\right)^2\middle|\begin{matrix}(1-\xi_{m+1}),\ \triangle(1,-\xi_{m+1}+\frac{3}{2})\\ \triangle(1,-\xi_m-a_m+\frac{3}{2}),\ (1-\xi_m-a_m)\end{matrix}\right]$$

$$\times G^{0,\,2(n+1)}_{2(n+1),\,2n}\left[\left(\frac{2}{qt}\right)^2\middle|\begin{matrix}(1-\eta_{n+1}),\ \triangle(1,-\eta_{n+1}+\frac{3}{2})\\ \triangle(1,-\eta_n-\beta_n+\frac{3}{2}),(1-\eta_n-\beta_n)\end{matrix}\right]st\,f(s^2,\ t^2)\ ds\ dt.$$

प्राप्त होगा।

अब उपर्युक्त व्यंजक को (3·3) में व्यवहृत करने पर तथा उपर्युक्त प्रकार से आगे बढ़ने पर

$$F_3(p,q)=2^{-15+\xi_{m+1}+\eta_{n+1}-\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i}\pi^{-2}p^5q^5$$
$$\times\int_0^\infty\int G^{0,\,4(m+1)}_{4(m+1),\,4m}\left[\left(\frac{4}{ps}\right)^4\Big/\begin{matrix}(1-\xi_{m+1}),\triangle(1,-\xi_{m+1}+\frac{3}{2}),(2,-\xi_{m+1}+\frac{5}{2})\\ \triangle(2,-\xi_m-a_m+\frac{5}{2}),\triangle(1,-\xi_m-a_m+\frac{3}{2}),(1-\xi_m-a_m)\end{matrix}\right]$$
$$\times G^{0,\,4(n+1)}_{4(n+1),\,4n}\left[\left(\frac{4}{qt}\right)^4\Big/\begin{matrix}(1-\eta_{n+1}),\triangle(1,-\eta_{n+1}+\frac{3}{2}),\triangle(2,-\eta_{n+1}+\frac{5}{2})\\ \triangle(2,-\eta_n-\beta_n+\frac{5}{2}),\triangle(1,-\eta_n-\beta_n+\frac{3}{2}),(1-\eta_n-\beta_n)\end{matrix}\right]$$
$$\times s^3t^3f(s^4,t^4)\,ds\,dt$$

प्राप्त होगा। इस क्रिया को क्रमशः (3·4) के संगत दुहराने पर हमें (3·6) की प्राप्ति होगी।

विशिष्ट दशा :

$$a_j=0,\ j=1,2,\ldots,m,\quad \xi_{m+1}=0;\quad \beta_j=0,\ j=1,2,\ldots,n,\quad \eta_{n+1}=0,$$

मानने पर तथा (2·2) का उपयोग करने पर हमें दो चरों वाले लैपलास परिवर्त की शृंखला प्राप्त होगी।

यदि
$$F_1(p,q)\doteqdot f(x,y)$$
$$F_2(p,q)\doteqdot(xy)^{-1/2}F_1\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right),$$
$$F_3(p,q)\doteqdot\frac{4(xy)^{1/2}}{\pi}F_2\left(\frac{1}{4x^2},\frac{1}{4y^2}\right),$$
$$F_4(p,q)\doteqdot\frac{4(xy)^{1/2}}{\pi}F_3\left(\frac{1}{4x^2},\frac{1}{4y^2}\right),$$

....

....

तथा
$$F_n(p,q)\doteqdot\frac{4(xy)^{1/2}}{\pi}F_{n-1}\left(\frac{1}{4x^2},\frac{1}{4y^2}\right),$$

तो
$$\frac{4}{\pi pq}F_n\left(\frac{p^2}{4},\frac{q^2}{4}\right)\doteqdot f(x^{2^{r-1}},\ y^{2^{r-1}}),$$

यदि $R(p,q)>0$, तथा $|f(x^{2^{n-1}},y^{2^{n-1}})|$, $n=1,2,\ldots,r$, का लैपलास परिवर्त, सभी विद्यमान हों।

यदि हम (3·1) से (3·6) तक $a_j=0$, $j=1,2,\ldots,m-1$, $a_m=-m-k$, $\xi_m=m-k$, $\xi_{m+1}=-m-k$; $\beta_j=0$, $j=1,2,\ldots,n-1$, $\beta_n=-m_1-k_1$, $\eta_n=m_1-k_1$, $\eta_{n+1}=-m_1-k_1$ मानें तो हमें दो चरों वाले माइजर परिवर्त की संगत शृंखला प्राप्त होगी।

(3·1) से (3·6) तक $a_j=0$, $j=1,2,\ldots,m-1$ $a_m=\frac{1}{2}-m-k$, $\xi_m=2m$, $\xi_{m+1}=0$; $\beta_j=0$, $j=1,2,\ldots,n-1$, $\beta_n=\frac{1}{2}-m_1-k_1$, $\eta_n=2m_1$, $\eta_{n+1}=0$ रखने पर हमें दो चरों वाले

वर्मा-परिवर्त की शृंखला प्राप्त होगी

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक इस टिप्पणी के लेखन में पथप्रदर्शन हेतु डा० आर० के० सक्सेना का आभारी है ।

निर्देश

1. बेटमान एम० प्रोजेक्ट । Higher Transcendental Functions. **भाग** I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1953.
2. भिसे, वी० एम० । **जर्न० विक्रम यूनि०** 1959, **3**(3), 57-63.
3. दितकिन, वी० ए० तथा प्रुदनिकोव, ए० पी० । Operational Calculus in two variables and its application. **पर्गमान प्रेस,** 1962.
4. जैन, एन० सी० । **(प्रेषित)**
5. मेहरा, ए० एन० । **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०,**1956, **48** (2), 83-94.
6. मुकर्जी, एस० एन० । **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1962. **5,** 49-55.
7. सक्सेना, आर० के० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस (इंडिया),** 1960, **26 A,** 400-413.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 1, January 1969, Pages 41-50

उत्तर प्रदेश की लवणीय तथा क्षारीय मिट्टियों का अध्ययन

शिवगोपाल मिश्र, देवेन्द्र प्रसाद शर्मा

तथा

तौहीद खाँ

कृषि रसायन शाखा, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त–जनवरी 4,1968]

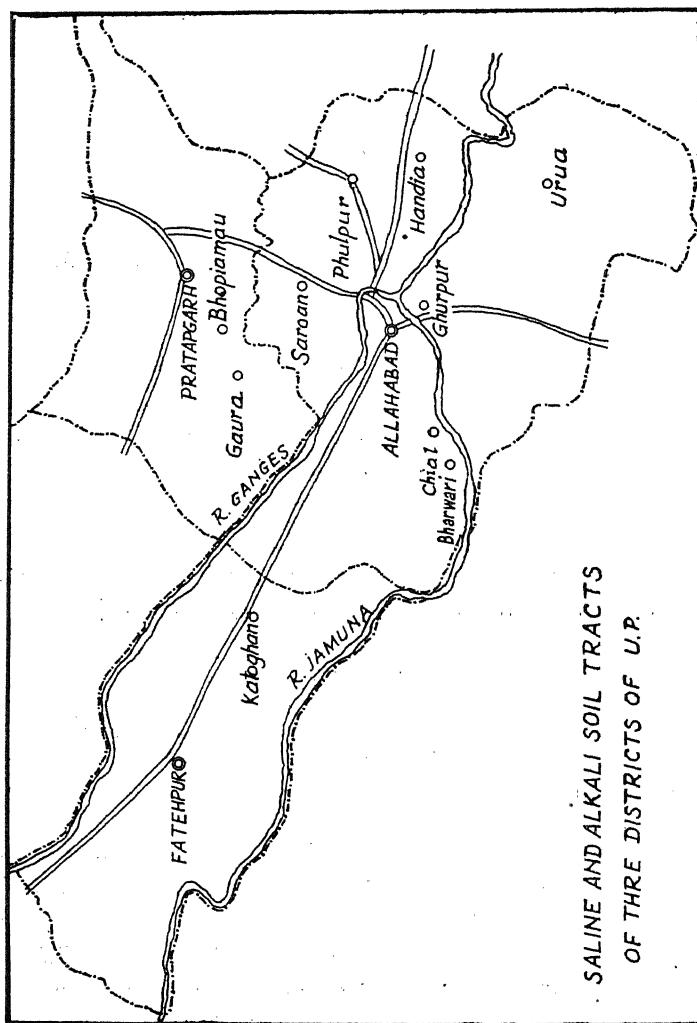
सारांश

उत्तर प्रदेश में इलाहाबाद तथा ग्रास पास के स्थानों से प्राप्त 14 लवणग्रस्त मिट्टियों का ग्राकृतिक एवं रासायनिक ग्रध्ययन किया गया। ऐसी मिट्टियों को वर्गीकृत करने के लिये रिचार्ड के विनिमेय सोडियम तथा विद्युत चालकता, ग्राइवानोव तथा रोजानोवा के धनायन ग्रनुपात, क्लोराइड-सल्फेट ग्रनुपात तथा जल विलेय बोरान की मात्रा को ग्राधार बनाया गया। लवणीय तथा क्षारीय मिट्टियों के वर्गीकरण की उपयोगिता के ग्रार्थिक तथा सुधार सम्बन्धी पहलुग्रों पर बल दिया गया है।

Abstract

Studies on saline and sodic soils of U. P. *By* S. G. Misra, D. P. Sharma and T. Khan, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad.

Detailed morphological and chemical properties of 14 salt-damaged soils collected from important 'Usar' tracts of Allahabad and parts of adjoining places have been described. Soils have been classified on the basis of Richard's exchangeable Na and EC, Ivanova and Rozanova's cationic ratios, ratio of Cl/SO_4 and water-soluble boron content. The usefulness of these systems has been emphasized for economic and sound reclamation of such problem soils.

लवणीय तथा क्षारीय मिट्टियों का वर्गीकरण किसी एक प्रचलित विधि के ग्राधार पर नहीं किया जा सकता क्योंकि इससे न तो मिट्टी के लवणों का ही पता चलता है ग्रौर न प्राप्त परिणामों से उनका सुधार ही किया जा सकता है। सोडियम के हानिकारक प्रभावों के ग्रतिरिक्त इन मिट्टियों में बोरान की बहुलता तथा विनिमेय मैगनीशियम तथा पोटैशियम की मात्रा का ज्ञान ग्रावश्यक है। साथ ही थास

मानचित्र 1 : उत्तर प्रदेश के तीन जनपदों की लवणीय तथा क्षारीय मिट्टियों के क्षेत्र

ऋणायन संघटन तथा उनके अनुपातों का भी इन मिट्टियों में अत्यन्त महत्व है क्योंकि इसके द्वारा उनके सम्भावी सुधार एवं रासायनिक सुधारकों द्वारा विलेय तत्वों के निक्षालन की शक्यता पर प्रभाव पड़ता है।

प्रस्तुत अध्ययन में आयन के विषाक्त प्रभावों को ज्ञात करने के लिये विभिन्न स्थानों से प्राप्त मिट्टियों का वर्गीकरण कई उपयोगी आधारों पर किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये इलाहाबाद, फतेहपुर तथा प्रतापगढ़ जनपदों के चौदह स्थानों से क्षारीय मिट्टियाँ एकत्र की गई (देखो मानचित्र 1)। प्रमुख क्षेत्र जिनसे नमूने लिये गये वे थे—कटोघन, भरवारी, मेजा, घूरपुर, फूलपुर, हँडिया, चायल, सोरांव, भोपियामऊ, गौरा। सतही आकृति, प्राकृतिक वनस्पति तथा भूजल स्तर के अतिरिक्त इन मिट्टियों के कई रासायनिक गुणों का अध्ययन किया गया। जलविलेय बोरान की मात्रा करकुमिन विधि (जैक्सन)[3] द्वारा ज्ञात की गई।

सारणी 1

मिट्टी के नमूने तथा नमूना लिये जाने वाले स्थानों का विवरण

मिट्टी का प्रयोगशाला अंक	क्षेत्र का नाम	गाँव	तहसील/खंड	जनपद
KS_1	कटोघन	कटोघन	खागा	फतेहपुर
KS_2	कटोघन	अमाऊँ	खागा	,,
BS_1	भरवारी	गौरा	मनिहानपुर	इलाहाबाद
MS_1	मेजा	डरवा	मेजा	,,
MS_2	मेजा	डरवा	मेजा	,,
MS_3	मेजा	कोटहा	मेजा	,,
PS_1	फूलपुर	फूलपुर	फूलपुर	,,
SS_1	सोराँव	दालपुर	सोराँव	,,
SS_3	सोराँव	ददोली	सोराँव	,,
BMS_1	भोपियामऊ	भोपियामऊ	सदर	प्रतापगढ़
GS_1	गौरा	गौरा	गौरा	,,
CP_1	चायल	सचवारा	चायल	इलाहबाद
HP_1	हँडिया	हँडिया	हँडिया	,,
GP_1	घूरपुर	गोहनिया	घूरपुर	,,

विभिन्न क्षेत्रों से एकत्रित मिट्टियों के प्राकृतिक अभिलक्षण

मिट्टी का प्रयोगशाला निर्देशांक	विवरण
KS_1	ऊपरी सतह भूरे राख के रंग की, कणहीन, तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के साथ बुदबुदाहट, 2 फुट नीचे कंकड़ की उपस्थिति, जाड़े में जल की सतह 12 फुट तथा वर्षाकाल में 5 फुट तक, कुछ स्थानों पर दूब तथा उसरौटा घासों की बहुलता अन्यथा वनस्पतिहीन ।
KS_2	ऊपरी सतह की मिट्टी शिथिल तथा हलके भूरे रंग की किन्तु 2 फुट की गहराई पर कड़े कंकड़ तथा मिट्टी भी कड़ी है, तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के साथ बुदबुदाहट, फिनाल्फथैलीन से साथ गुलाबी रंग, पूरे क्षेत्र की मिट्टी बंजर ।
BS_1	मिट्टी सफेद भूरे रंग की, कुछ स्थानों में मृतिका युक्त भी, क्षरित तथा निचले स्थानों की मिट्टी में कंकड़, तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल तथा फिनाल्फथैलीन से कार्बोनेट तथा क्षारीयता की क्रिया, इस क्षेत्र की मिट्टी अनुपजाऊ एवं जहाँ तहाँ कुछ फसलें उगीं ।
MS_1	रेह मिट्टियों की तरह ऊपरी सतह की मिट्टी तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से (कार्बोनेट पर) क्रिया करती है, अत्यन्त क्षारीय, जलस्तर 10–15 फुट के बीच घटता-बढ़ता हुआ, वनस्पतिरहित ।
MS_2	ऊपरी सतह पर रेह का सफेद भूरा आवरण, अत्यन्त क्षारीय, गहराई पर मिट्टी कठोर, दूब तथा उसरौटा घासों की बहुलता ।
MS_3	ऊपरी सतह हलके वयन की, रंग सफेद भूरा, तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से मन्द अभिक्रिया, फिनाल्फथैलीन के साथ गुलाबी रंग, कहीं कहीं कुछ वनस्पतियाँ, लवणसह धान की किस्में उगी हुई ।
PS_1	मिट्टी की ऊपरी सतह पर कहीं कहीं काली मिट्टी, MS_3 से मिलती-जुलती ।
SS_1	रंग हलका भूरा, कण विन्यास नष्टप्राय, नम, जुताई के उपयुक्त, यह भी MS_3(A) के समान ।
SS_3	रंग सफेद भूरा, जुताई के योग्य, किन्तु अम्ल के साथ तीव्र बुदबुदाहट, गेहूँ की फसल किन्तु असंतोषजनक, SS_1 (A) के समान ।

मिट्टी का प्रयोगशाला निर्देशांक	विवरण
BMS_1	हलके भूरे रंग की, कृषि योग्य, फिनाल्फथैलीन के साथ कोई रंग नहीं किन्तु अम्ल के साथ तीव्र बुदबुदाहट ।
GS_1	ऊपरी सतह BMS_1 (A) की तरह किन्तु फिनाल्फथैलीन के साथ गुलाबी रंग, घास की कुछ किस्में उगी हुई ।
CP_1	ऊपरी सतह सफेद भूरे रंग की, छोटे छोटे कंकड़-कणों की उपस्थिति, अम्ल तथा फिनाल्फथैलीन के साथ क्रमशः बुदबुदाहट तथा गुलाबी रंग, जलोत्सारण उपयुक्त नहीं ।
HP_1	ऊपरी सतह लवण के आवरण से युक्त, छूने में शुष्क किन्तु भुरभुरी, 1–2 फुट की गहराई तक की मिट्टी नम, अत्यन्त क्षारीय ।
GP_1	ऊपरी सतह सफेद लवण से युक्त, शिथिल तथा कणहीन, तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के साथ कोई क्रिया नहीं, वनस्पतिहीन ।

सारणी 2

मिट्टियों के जल निष्कर्ष का रासायनिक संघटन

मिट्टी का निर्देशांक	धनायन me/l				ऋणायन me/l				बोरान
	Ca	Mg	K	Na	CO_3	HCO_3	Cl	SO_4	ppm.
KS_1	0·22	1·55	0·97	10·01	0.85	5·55	0·80	6·77	0·42
KS_2	0·43	...	1·20	19·14	2·98	4·90	3·60	8·44	1·56
BS_1	0·32	0·41	0·82	12·62	4·68	3·19	0·80	3·12	1·14
MS_1	0·22	0·21	0·45	6·63	1·70	5·98	1·60	1·35	0·23
MS_2	0·32	0·21	0·35	12·62	1·60	6·40	1·55	1·35	0·14
MS_3	0·38	0·15	0·15	0·87	...	1·80	0·25	0·78	0·24
PS_1	0·32	0·41	0·67	13·92	5·11	6·16	0·60	6·97	2·38
SS_1	0·11	0·10	...	8·70	3·41	5·75	1·20	1·04	0·56
SS_3	0·11	...	0·30	0·87	...	0·43	0·40	0·01	0·26
BMS_1	0·54	0·82	0·37	2·18	...	3·40	1·20	0·31	0·26
GS_1	0·11	1·03	0·30	10·44	4·26	5·31	0·80	1·51	0·12
HP_1	0·32	0·45	0·48	13·00	4·45	5·62	0·40	5·2	...
CS_1	0·28	0·12	0·11	6·67	3·2	4·08	0·20	0·10	...
GP_1	0·68	2·10	...	0·28	...	0·10	5·00	10·1	...

रिचार्ड[5] ने मिट्टियों का वर्गीकरण E.S.P. तथा EC के अधार पर किया। अतः यदि इस प्रकार से वर्गीकरण किया जाय तो MS तथा SS_3 मिट्टियाँ क्षारीय मिट्टियों के वर्ग में रखी जा सकती हैं ; GP_1 को लवणीय तथा शेष मिट्टियाँ लवणीय–क्षारीय वर्ग में रखा जावेगा। आइवानोवा तथा रोजानोवा के धनायन अनुपात[1] के अनुसार MS_3 मिट्टी को Na-Ca लवणबहुल (Solonchak) श्रेणी में रखेंगे क्योंकि Na+K/Ca+Mg=1—4 के बीच में है।

सारणी 3

ऊसर मिट्टियों में विनिमेय धनायन

मिट्टी का निर्देशांक	पी-एच०	विद्युत चालकता मिली मोह्रोज प्रति से० मी० 25°C पर	$CaCO_3$ प्रतिशत	E.S.P.	विनिमेय धनायन me/l			
					Ca	Mg	K	Na
KS_1	10·0	11·80	2·76	81·54	2·81	1·15	0·06	8·04
KS_2	10·4	18·16	2·55	73·38	2·91	0·98	...	7·03
BS_1	10·4	13·85	3·82	70·31	3·51	0·75	0·10	7·60
MS_1	10·0	9·79	9·32	74·85	3·48	1·32	...	9·91
MS_2	10·4	13·41	5·94	57·53	3·98	1·03	0·64	6·87
MS_3	8·5	2·81	1·27	20·86	5·53	1·34	0·37	1·74
PS_1	10·6	13·55	4·24	89·64	1·96	0·77	0·39	9·17
SS_1	10·5	9.54	2·72	83·98	4·23	1·16	...	8·68
SS_3	9·2	4·09	1·69	18·71	5·96	1·67	...	0·65
BMS_1	9·1	5·44	11·87	51·70	4·75	1·57	0·36	5·32
GS_1	10·5	10·90	1·69	62·69	3·89	0·85	0·21	5·65
HP_1	10·4	5·0	15·1	57·7	4·24	1·50	0·26	6·00
CS_1	10·4	3·2	17·4	48·0	4·12	1·35	...	9·12
GP_1	8·2	10·5	1·7	10·5	5·82	2·10	0·10	2·02

सारणी 2 में मिट्टियों के जल-निष्कर्ष के रासायनिक संघटन (मिट्टी-जल 1 : 5 के अनुपात) दिये गये हैं जिनमें विनिमेय धनायन, विद्युत चालकता (EC), विनमय-सोडियम प्रतिशत (E.S.P.), पी-एच० (pH) तथा कैलशियम कार्बोनेट ($CaCO_3$) की मात्रा आदि सम्मिलित हैं।

प्राप्त परिणामों से स्पष्ट है कि सभी मिट्टियों में EC तथा E.S.P. की मात्रा भिन्न भिन्न है अतः रिचार्ड के वर्गीकरण के आधार पर मिट्टियों को निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया गया है :

लवणीय	लवणीय-क्षारीय				क्षारीय
GP_1	KS_1	KS_2	BS_1	MS_1	MS_3
	MS_2	PS_1	SS_1		SS_3
	BMS_1	GS_1	HP_1		CS_1

इस प्रकार हम देखते हैं कि अधिकांश मिट्टियाँ लवणीय-क्षारीय वर्ग की हैं क्योंकि इनमें EC का मान 4 से अधिक है तथा विनिमेय-सोडियम प्रतिशत भी 15 से अधिक है। आइवानोवा तथा रोजानोवा[1] ने धनायनों के अनुपात के आधार पर बहुलवण मिट्टियों (Solonchak) को निम्न प्रकार से पाँच भागों में रखा है—

1. Na-Solonchak $(Na+K)/(Ca+Mg)=4$
2. Na-Mg Solonchak $(Na+K)/(Ca+Mg)=1$ में 4 तथा $Ca/Mg<1$
3. Na-Ca Solonchak $(Na+K)/(Ca+Mg)=1$ से 4 तथा $Ca/Mg>1$
4. Ca-Solonchak $(Na+K)/(Ca+Mg)=1$ तथा $Ca/Mg>1$
5. Mg-Solonchak $(Na+K)/(Ca+Mg)=1$ तथा $Ca/Mg<1$

इस आधार पर हमने लवण-बहुल मिट्टियों को निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया है :—

मिट्टियाँ	$(Na+K)/(Ca+Mg)$ अनुपात	Ca/Mg अनुपात	वर्गीकरण
KS_1	6·2	...	Na-Solonchak
KS_2	47·3	...	,,
BS_1	18·4	...	,,
MS_1	16·4	...	,,
MS_2	24·4	...	,,

मिट्टियाँ	(Na+K)/(Ca Mg) अनुपात	Ca/Mg अनुपात	वर्गीकरण
			Na-Solonchak
PS_1	19·9	...	,,
SS_1	41·4	...	,,
SS_3	10·6	...	,,
GS_1	9·4	...	,,
HP_1	16·1	...	,,
CS_1	16·9	0·6	,,
MS_3	1.9	2·5	Ca-Solonchak
BMS_1	1·9	0·6	Mg-Solonchak
GP_1	0·1	...	,,

इसके अतिरिक्त मिट्टियों को उनकी लवण मात्रा के अधार पर वर्गों में विभाजित गया है। वे मिट्टियाँ जिनमें ऊपरी 1 मीटर में 0·2 प्रतिशत लवणीयता है उन्हें अलवणीय मिट्टी कहा गया है तथा जिनमें 0·2–0·5 प्रतिशत लवणीयता है उन्हें अल्प लवणीय मिट्टी के वर्ग में रखा गया। 0·5 प्रतिशत की लवणीय मिट्टी को अति–लवणीय मिट्टी की संज्ञा दी गई है। इलाहाबाद के आसपास की मिट्टियाँ निम्न प्रकार से वर्गीकृत की जा सकती हैं :–

अलवणीय	अल्प-लवणीय	अति-लवणीय
MS_3	KS_1	KS_2
SS_3	BS_1	GP_1
BMS_1	MS_1	
CS_1	MS_2	
	PS_1	
	SS_1	
	GS_1	
	HP_1	

बोरान विषाक्तता के अनुसार U.S. Salinity Laboratory अनुसंधानकर्ताओं (1954) ने लवणीय तथा क्षारीय मिट्टियों को उपयुक्त, कम उपयुक्त तथा अनुपयुक्त वर्गों में विभाजित किया है। बोरान की ppm सान्द्रता के आधार पर निम्न प्रकार से मिट्टियों को वर्गीकृत किया गया है।

सुरक्षित (<0·7 ppm)	सीमान्तीय (0·7—1·5 ppm)	असुरक्षित (>1·5 ppm)
KS_1	BS_1	KS_2
MS_1		PS_1
MS_2		
SS_1		
SS_3		
BMS_1		
GS_1		

विवेचना

सारणी 2 के परिणामों के अधार पर KS_2 तथा PS_1 मिट्टियों को असुरक्षित वर्ग में रखा गया है क्योंकि बोरान के अतिरिक्त सोडियम आयन की भी मात्रा अधिक है जो क्रमशः 19·14 तथा 13·92 m.e/l है। ऐसी मिट्टियों को सुधारने के लिये यह आवश्यक है कि बोरान विलेय अवस्था में भूमि से बाहर निकाल दिया जाय। यद्यपि बोरान जल में कम विलेय है किन्तु सिचाई-जल द्वारा बारम्बार उपयोग से इसकी विषाक्त सीमा को कम किया जा सकता है।

सारणी 3 से पता चलता है कि सभी मिट्टियों में कैलशियम कार्बोनेट की मात्रा उनकी लवणीयता तथा क्षारीयता के साथ साथ कम तथा अधिक है। केवल GP_1 में ही कैलशियम कार्बोनेट की मात्रा 2·5 से कम है तथ शेष मिट्टियों में 20·72 प्रतिशत तक कैलशियम कार्बोनेट उपस्थित है।

Cl/SO_4 के अधार पर जो वर्गीकरण किया गया वह भी अत्यन्त महत्वपूर्ण है क्योंकि इसके आधार पर KS_1, KS_2, BS_1, MS_3, तथा PS_1 मिट्टियाँ SO_4 कोटि की देखी जाती हैं जिससे यह प्रकट होता है कि इन मिट्टियों में सल्फेट आयन की प्रचुरता है। अतः यह आवश्यक है कि इन मिट्टियों को जलमग्न होने से बचाया जाय क्योंकि केली[2] (Kelley) के अनुसार जीवांश की उपस्थिति में सल्फेट आयन अवकरण होने की आशंका रहती है जिसके फलस्वरूप भूमि में और भी क्षारीयता बढ़ सकती है।

GP_1 में HP_1 तथा CP_1 मिट्टियों की अपेक्षा सल्फेट तथा कैलशियम कार्बोनेट की मात्रायें कम हैं। HP_1 मिट्टी में कैल्सियम कार्बोनेट की मात्रा 23 प्रतिशत तक तथा GP_1 में 2-3 प्रतिशत से अधिक नहीं है। GP_1 तथा HP_1 को SO_4—Cl तथा CP_1 को Cl—प्रकार की मिट्टी कहा जा सकता है।

धनायन अनुपात के आधार पर किये गये वर्गीकरण से इन मिट्टियों के बारे में और भी उपयोगी परिणाम प्राप्त हुये हैं। उदाहरणार्थ, MS_3 मिट्टी में विनमेय सोडियम की मात्रा 20 प्रतिशत है अतः इसे $Na\text{-}Ca\text{-}SO_4$ प्रकार के लवणीय मृदा कहा जा सकता है। इससे स्पष्ट है कि इस प्रकार की मृदा में Ca^{2+} प्राप्य रूप में है जिसका उपयोग सिंचाई-जल द्वारा विनिमेय सोडियम को विस्थापित करने में किया जा सकता है। अतः ऐसे क्षेत्र की मिट्टियाँ जो इस प्रकार के स्वभाव की हों उन्हें 'ऊसर' बनने से बचाया जा सकता है।

निर्देश

1. आइवानोवा, ई० एन० तथा रोजानोवा, ए० एन०। **पेडॉलाजी** (USSR), 1939 No. 7, 44-52
2. केली, डब्लू० पी०। Alkali Soils, Their formation, Properties and Reclamation **रेनहोल्ड पब्लिशर्स न्यूयार्क**, 1951.
3. जैक्सन, एम० एल०। Soil Chemical Analysis **एशिया पब्लिशिंग हाउस बम्बई**, 1962.
4. मिश्र, एस० जी० तथा शर्मा, डी० पी०। **जर्न० इन्डियन सोसा० स्वायल साइंस**, 1968 **16**, 271-275.
5. रिचार्ड, एल० ए०। **यूनाइटेड स्टेट डिपा० एग्री०** Hand Book No 60. (1954)

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 12 | अप्रैल 1969 | संख्या 2

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 2 April 1969, Pages 51-59

दो चरों वाले G-फलन का लघुकरण

एस० सी० गुप्त
गणित विभाग, राजकीय विद्यालय, कोटा

[प्राप्त—जून 10, 1968]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में अग्रवाल द्वारा पारिभाषित दो चरों वाले G-फलन की कतिपय दशाओं का उल्लेख है जिनमें यह माइजर के G-फलन में लघुकरित हो जाती है। कतिपय रोचक विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

Reduction of G-function of two variables. *By* S. C. Gupta, Department of Mathematics, Government College, Kotah.

In this paper a few cases have been dealt in which the *G*-funtion of two variables recently defined by Agrawal reduces to Meijer's *G*-function. Some interesting particular cases have also been given.

1. इधर अग्रवाल[1] तथा शर्मा[6] ने दो चरों वाले फलन को निम्नांकित प्रकार से पारिभाषित किया है :

$$G^{n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t\ :\ t'],\ s,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{matrix} x \\ \\ y \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix} (\epsilon_p) \\ (\gamma_t) : (\gamma' t') \\ (\delta_s) \\ (\beta_q) : (\beta' q') \end{matrix}\right.\right]$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\epsilon_j+\xi+\eta)\prod_{j=1}^{\nu_1}\Gamma(\gamma_j+\xi)\prod_{j=1}^{\nu_2}\Gamma(\gamma'_j+\eta)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(\beta'_j-\eta)\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(\beta_j-\xi)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(\epsilon_j-\xi-\eta)\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\delta_j+\xi+\eta)\prod_{j=\nu_1+1}^{t}\Gamma(1-\gamma_j-\xi)\prod_{j=m_1+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+\xi)}$$

$$\times\frac{x^{\xi}y^{\eta}}{\prod_{j=\nu_2+1}^{t'}\Gamma(1-\gamma_j'-\eta)\prod_{j=m_2+1}^{q'}\Gamma(1-\beta'_j+\eta)}\,d\xi\,d\eta \tag{1.1}$$

$$p+q+s+t<2(m_1+\nu_1+n), \quad p+q'+s+t'<2(m_2+\nu_2+n)$$

$$|\arg x|<\pi[m_1+\nu_1+n-\tfrac{1}{2}(p+q+p+t)] \text{ तथा } |\arg|y|<\pi[m_2+\nu_2+n-\tfrac{1}{2}(p+q'+s+t')]$$

जिसमें (a_p) संकेत के द्वारा $a_1, a_2, \ldots, a_p$ अवयवों का अनुक्रम व्यक्त होता है ।

अग्रवाल[1] ने कुछ ऐसी दशायें दी हैं जिसमें यह फलन एक चर वाले माइजर के G-फलन में लघुकरित हो जाता है । इस शोध पत्र का उद्देश्य कुछ ऐसी और दशायें प्रस्तुत करना है जब (1·1) एक चर वाले G-फलन में लघुकरित हो जाता है । अनुभाग 2 में चार मुख्य फल सिद्ध किये गये हैं और अनुभाग 3 में कुछ विशिष्ट दशाये दी गई हैं । आगे $n, m, p, q, r, s, h, \alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$ अनृण-पूर्णांक होंगे ।

पूरे शोधपत्र में निम्नांकित संकेत प्रयुक्त होंगेः—

$\triangle(n, a)$ से $\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}, \ldots\ldots, \frac{a+n-1}{n}$ प्राचलों का समूह

$[\triangle(n, a_\nu)]$ से $\triangle(n, a_1), \triangle(n, a_2); \ldots\ldots\ldots, \triangle(n, a_\nu);$

$\triangle(n, a\pm b)\equiv\triangle(n, a+b), \triangle(n, a-b)$ तथा $\Gamma(a\pm b)\equiv\Gamma(a-b)\Gamma(a-)$ द्योतित होंगे

उपपत्ति में निम्नांकित सूत्रों ([2] pp 4, 209; [6], p 737; [3]) की आवश्यकता होगी

$$\Gamma nz=(2\pi)^{1/2-1/2n}\, n^{nz-1/2} \prod_{R=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{R}{n}\right) \tag{1·2}$$

$$G_{pq}^{mn}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)=(2\pi)^{1/2(p+q)-m-n}\, 2^{1/2(p-q)+1-a_1\cdots-a_p+b_1\cdots b_q} \times G_{2p,\ 2q}^{2m,\ 2n}\left(2^{2p-2q}X^2\,\middle|\,\begin{matrix}(\frac{1}{2}a_p),\ (\frac{1}{2}a_p+\frac{1}{2})\\(\frac{1}{2}b_s),\ (\frac{1}{2}b_s+\frac{1}{2})\end{matrix}\right) \tag{1·3}$$

$$G_{22}^{22}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}1-\alpha, & 1-\beta\\ \gamma, & \delta\end{matrix}\right)=2^{\gamma}\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)\Gamma(\alpha+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} \times {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+\gamma, \beta+\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma+\delta\end{matrix}; 1-z\right) \tag{1·4}$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\1+a-b\end{matrix}; -1\right)=2^{-a}\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma(1-b+\frac{1}{2}a)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)} \tag{1·5}$$

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} G^{A\,B}_{C\,D}\left(ax\left|\begin{matrix}(e_C)\\(e^D)\end{matrix}\right.\right) G^{h\,o}_{q\,r}\left(bx\left|\begin{matrix}(a_q)\\(\beta_r)\end{matrix}\right.\right) G^{\alpha\beta}\left(c x^{n/m}\left|\begin{matrix}(a_\gamma)\\(b_\delta)\end{matrix}\right.\right) dx \tag{1·6}$$

$$=(2\pi)^{(1-n)(h-1/2q-r/2)+(1-m)(\alpha+\beta-1/2\gamma-1/2\delta)+(1-n)(A+B-1/2C-1/2D)}$$

$$\times\, {}_n\Sigma\beta_i-\Sigma\alpha_j+(\lambda-1/2)(r-q)+\Sigma b_i-\Sigma a_i+1/2\gamma-1/2\delta+1\ {}_m\Sigma b_j-\Sigma a_j+1/2\gamma-1/2\delta+1\ b^{-\lambda}$$

$$\times G^{nh,\,nB,\,m\beta,\,nA,\,m\alpha}_{nr,\,[nc\,:\,m\gamma],\,nq,\,[nD\,:\,m\delta]}\left[\begin{matrix} n^{\,n(C-D)} \\ \dfrac{a\ n}{b^n n^{n(q-r)}} \\ \dfrac{c^m m^{m(\gamma-\delta)}}{b^n n^{n(q-r)}}\end{matrix}\left|\begin{matrix}[\triangle(n,\,1-\beta_r-\lambda)]\\ [\triangle(n,1-e_c)];\ [\triangle(m,\,1-a\gamma)]\\ [\triangle(n,\,a_q+\lambda)\\ [\triangle(n,f_D);\quad \triangle(m,\,b\delta)]\end{matrix}\right.\right]$$

यदि $2(h+A+B)>q+r+C+D,\ 2(nh+m\beta+m\alpha)>nq+nr+m\gamma+m\delta$

$$\left|\arg\frac{a}{b}\right|<\pi(h+A+B-\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}r-\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}D)$$

$$\left|\arg\frac{c^m}{b^n}\right|<\pi(nh+m\beta+m\alpha-\tfrac{1}{2}nq-\tfrac{1}{2}nr-\tfrac{1}{2}m\gamma-\tfrac{1}{2}m\delta).$$

2. नीचे, हम सिद्ध किये गये चार प्रमुख फल दे रहे हैं :—

प्रथम प्रमुख फल :

$$G^{n,\,\nu_1,\,\nu_2,\,m_1,\,m_2}_{p,\,[t\,:\,t'],\,s,\,[q\,:\,q']}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}(\epsilon_p)\\(\gamma_t)\,:\,(\gamma'_{t'})\\(\delta_s)\\(\beta_q)\,:\,(\beta'_{q'})\end{matrix}\right.\right] \tag{2.1}$$

$$=(2\pi)^{(1-r)(n+\nu_1+\nu_2+m_1+m_2-p/2-t/2-t'/2-s/2-q/2-q'/2}$$

$$\times\, {}_r\Sigma\gamma_j+\Sigma\gamma'_j+\Sigma\beta_j+\Sigma\beta'_j-\Sigma\epsilon_j-\Sigma\delta_j+p/2-t/2-t'/2-q/2-q'/2+2$$

$$\times G^{rn,\,r\nu_1,\,r\nu_2,\,rm_1,\,rm_2}_{rp,\,[rt\,:\,rt'],\,rs,\,[rq\,:\,rq']}\left[\begin{matrix}x^r r^{r(2n+t-p-s-q)}\\ \\ y^r r^{r(2n+t'-q-s-q')}\\ \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}[\triangle(r,\,\epsilon_p)]\\ [\triangle(r,\,\gamma_t)];\ [\triangle(r,\,\gamma'_{t'})]\\ [\triangle(r,\,\delta_s)]\\ [\triangle(s,\,\beta_q)[;\ [\triangle(r,\,\beta'q')]\end{matrix}\right.\right]$$

उपपत्तिः दो चारों वाले G-फलन की परिभाषा (1·1) से इस फल को गुणन सूत्र (1.2) के सम्प्रयोग द्वारा सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

उपर्युक्त फल G-फलन के फल (1·3) को सार्वीकृत कर देता है जिसे (2.1) से $n=p=s=0$ होने पर प्राप्त किया जा सकता है।

द्वितीय प्रमुख फलः

$$G^{2r,\ 2r,\ s\beta,\ 4r,\ s\alpha}_{2r,\ [2r\,:\,s\gamma],\ o,\ [4r\,:\,s\delta]}\left[\begin{matrix}2^{2r}\\ y\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(r,\epsilon),\ \triangle(r,\epsilon+\frac{1}{2})\\ \triangle(r,o),\ \triangle(r,\frac{1}{2});[\triangle(s,1-e_\gamma)]\\ \triangle\left(r,\frac{1}{4}\pm\frac{\lambda}{2}\right),\ \triangle\left(r,\frac{3}{4}\pm\frac{\lambda}{2}\right);[\triangle(s,f_\delta)]\end{matrix}\right.\right] \tag{2.2}$$

$$=(2\pi)^{3r-3/2}(2r)^{-1/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda)\,G^{s\alpha,\ s\beta+2r}_{s\gamma+2r,\ s\delta}\left(y\left|\begin{matrix}\triangle\left(r,\ \epsilon+\frac{1}{4}\pm\frac{\lambda}{2}\right),[\triangle(s,e_\gamma)]\\ [\triangle(s,f_\delta)]\end{matrix}\right.\right)$$

यदि $s\alpha+s\beta+r>\frac{1}{2}s\gamma+\frac{1}{2}s\delta,\ |\arg y|<\pi[s\alpha+s\beta+r-\frac{1}{2}(s\gamma+\frac{1}{2}s\delta)]$

उपपत्तिः $G\left[\begin{matrix}2^{2r}\\ y\end{matrix}\right]$ को कंटूर समाकल (1·1) में व्यक्त करते हुये एवं समाकलन के क्रम को बदल देने पर

$$\frac{1}{(2\pi i)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\prod\limits_{i=1}^{\beta}\left\{\Gamma\left(1-\frac{e_j}{s}+\eta\right)\dots\Gamma\left(\frac{1-e_j}{s}+\eta\right)\right\}\prod\limits_{j=1}^{\alpha}\left\{\Gamma\left(\frac{f_j}{s}-\eta\right)\dots\Gamma\left(\frac{f_j+s-1}{s}-\eta\right)\right\}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}\left\{\Gamma\left(\frac{e_j}{s}-\eta\right)\dots\Gamma\left(\frac{e_j+s-1}{s}+\eta\right)\right\}\prod\limits_{j=\alpha+1}^{\delta}\left\{\Gamma\left(1-\frac{\delta_j}{s}+\eta\right)\dots\Gamma\left(\frac{1-\delta_j}{s}+\eta\right)\right\}}\,y^n d\eta$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left[\left\{\Gamma\left(1-\frac{\epsilon}{s}+\xi+\eta\right)\dots\Gamma\left(\frac{1-\epsilon}{r}+\xi+\eta\right)\right\}\left\{\Gamma\left(1-\frac{\epsilon+\frac{1}{2}}{r}+\xi+\eta\right)\dots\right.\right.$$

$$\left.\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-\epsilon}{s}+\xi+\eta\right)\right\}$$

$$\times\left\{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}}{r}+\xi\right)\dots\Gamma\left(\frac{r-\frac{1}{2}}{r}+\xi\right)\right\}\left\{\Gamma\left(\frac{\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\lambda}{r}-\xi\right)\dots\Gamma\left(\frac{\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\lambda+r-1}{r}-\xi\right)\right\}$$

$$\left.\times\left\{\Gamma\left(\frac{\frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}\lambda}{r}-\xi\right)\dots\dots\Gamma\left(\frac{\frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}\lambda+r-1}{r}-\xi\right)\right\}2^{2r\xi}\right]d\xi$$

ξ समाकल में (1.2) के सम्प्रयोग से तथा उसके बाद (1·4) एवं (1·5) का व्यवहार करने पर फल की प्राप्ति सरलता से हो जाती है।

समाकलन का क्रम परिवर्तन न्यायसंगत है यदि r तथा s अनृण-पूर्णांकों से सर्वसमिका $s\alpha+s\beta>r>\frac{1}{2}s\gamma+\frac{1}{2}s\delta$ तथा $|\arg y|<\pi[s\alpha+s\beta+r-\frac{1}{2}(s\gamma+\frac{1}{2}s\delta)]$ की तुष्टि हो।

तृतीय प्रमुख फल :

$$G^{2r,\ 2r,\ s\beta,\ 4r,\ s\alpha}_{2r,\ [2r:s\gamma],\ 0,\ [4r,\ s\delta]}\left[\begin{matrix}1\\ \\ y\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(r,\epsilon),\ \triangle(r,\epsilon+\frac{1}{2})\\ \triangle(r,a),\ \triangle(r,a+\frac{1}{2});[\triangle(s,1-e_\gamma)]\\ [\triangle(r,b_2)];[\triangle(s,f_\delta)]\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(2a+2b_1)\Gamma(2a+2b_2)}{(2\pi)^{3/2-3r}(2r)^{4a+2b_1+2b_2-1/2}}$$

$$\times G^{s\alpha,\ s\beta+4r}_{s\gamma+4r,\ r\delta+2r}\left[y\left|\begin{matrix}[\triangle(2r,2\epsilon-2b_2)],[\triangle(s,e_\gamma)]\\ [\triangle(s,f_\delta)],\ \triangle(2r,2\epsilon-2a-2b_1-2b_2)\end{matrix}\right.\right] \tag{2.3}$$

यदि $s\alpha+s\beta+r>\frac{1}{2}(s\gamma+s\delta)$ तथा $|\arg y|<\pi[s\alpha+s\beta+r-\frac{1}{2}(s\gamma+s\delta)]$

(2·3) की उपपत्ति (2·2) की भाँति है ।

चतुर्थ प्रमुख फल :

$$G^{r,\ 0,\ s\beta,\ r,\ s\alpha}_{r,\ [0,\ s\gamma],\ o,\ [r,\ s\delta]}\left[\begin{matrix}x^r\\ \\ y\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(r,\epsilon)\\ --;[\triangle(s,1-e_\gamma)]\\ \triangle(r,0);[\triangle(s,f_\delta)]\end{matrix}\right.\right]$$

$$=(2\pi)^{1/2(r-1)}r^{-1/2}(x+1)^{\epsilon-1}G^{s\alpha,\ s\beta+s}_{s\gamma+r,\ s\delta}\left(\frac{y}{(1+x)^r}\left|\begin{matrix}\triangle(r,\epsilon),[\triangle(s,e_\gamma)]\\ [\triangle(s,f_\sigma)]\end{matrix}\right.\right) \tag{2.4}$$

यदि $s\delta+s\gamma<2s\alpha+2s\beta+r$, $|\arg y|<\pi[s\alpha+s\beta+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}s\delta-\frac{1}{2}s\gamma]$, $|\arg x|<\pi$

उपपत्ति: यदि (1·6) में $A=1, B=0, C=0, D=1, f_1=0, h=1, q=0, r=1, \beta_1=0$ रखें तो

$$\int_0^\infty z^{\lambda-1}e^{-(a+b)z}G^{\alpha\ \beta}_{\gamma\ \delta}\left(cz^{n/m}\left|\begin{matrix}(a_\gamma)\\ (b_\gamma)\end{matrix}\right.\right)dz$$

$$=K\frac{(2\pi)^{1-n/2}n^{1/2}}{b^\lambda}\ G^{n,\ 0,\ m\beta,\ n,\ m\alpha}_{n,\ [0,\ m\gamma],\ 0,\ [n:m\delta]}\left[\begin{matrix}\frac{a^n}{b^n}\\ \\ \frac{c^m m^{m(\gamma-\delta)}}{b^n n^{-n}}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(n,1-\lambda)\\ --;[\triangle(m,1-a_\gamma)]\\ \triangle(n,0,);[\triangle(m,b_\delta)]\end{matrix}\right.\right] \tag{2.5}$$

का मान प्राप्त होगा जिसमें $K=(2\pi)^{1/2(1-n)+(1-m(\alpha+\beta-1/2\gamma-1/2\delta)}n^{\lambda-1/2}m^{\Sigma b_j-\Sigma a_i+1/2\gamma-1/2\delta+1}$

(2.5) समाकल को भी सक्सेना [4 p. 401] की विधि से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$=K\frac{1}{(a+b)^\lambda}G^{m\alpha,\ m\beta+n}_{m\gamma+n,\ m\delta}\left[\frac{c^m m^{m(\gamma-\delta)}}{(a+b)^n n^{-n}}\left|\begin{matrix}\triangle(n,1-\lambda),[\triangle(m,a_\gamma)]\\ [\triangle(m,b_\delta)]\end{matrix}\right.\right] \tag{2.0}$$

(2.5) तथा (2.6) के फलों केसमतुल्य से प्राचलों में कतिपय हेर-फेर के साथ (2.4) फल की प्राप्ति होगी ।

3. अनुभाग B

नीचे हम कुछ विशिष्ट दशायें दे रहे हैं जिनकी प्राप्ति प्राचलों को उपयुक्त मान देकर की गई है :—

$$G^{n,\, \nu_1,\, \nu_2,\, m_1,\, m_2}_{p,\, [t\,:\,t'],\, s,\, [q\,:\,q']}\left[\begin{array}{c|c} x & (\epsilon_p) \\ & (\gamma_t):(\gamma'_{t'}) \\ y & (\delta_s) \\ & (\beta_q):(\beta'_{q'}) \end{array}\right]$$

$$=\pi^{1/2p+1/2t+1/2t+1/2s+1/2q+1/2q'-n-\nu_1-\nu_2-m_1-m_2}$$

$$\times\, 2^{\Sigma\gamma_j+\Sigma\gamma_j'+\Sigma\beta_j+\Sigma\beta_j'-\Sigma\epsilon_j-\delta_j+p+1/2s-n-\nu_1-\nu_2-m_1-m_2+2}$$

$$\times\, G^{2n,\, 2\nu_1,\, 2\nu_2,\, 2m_1,\, 2m_2}_{2p,\, [2t\,:\,2t'],\, 2s,\, [2q\,:\,2q']}\left[\begin{array}{c|c} x^2\, 2^{2(2n+t-p-s-q)} & [\triangle(2,\, \epsilon_p)] \\ y^2\, 2^{2(2n+t'-p-s-q')} & [\triangle(2,\, \gamma_t)];\ [\triangle[2,\, \gamma'_{t'})] \\ & [\triangle(2,\, \delta_s)] \\ & [\triangle(2,\, \beta_q)];\ [\triangle(2,\, \beta'_{q'})] \end{array}\right] \tag{3.1}$$

$$G^{2,\, 2,\, 0,\, 4,\, 2}_{2,\, [2,\, 0],\, 0,\, [4\,:\,4]}\left[\begin{array}{c|l} 2^2 & \triangle(2,\, 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\, 0,);\ - \\ y & \overline{} \\ & \triangle(2,\, \tfrac{1}{2}\pm\lambda),\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{4}+\epsilon+\tfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right]$$

$$=4\pi^{3/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda)K_\nu(2\sqrt{y}) \tag{3.2}$$

$$G^{2,\, 2,\, 0,\, 4,\, 1}_{2,\, [2\,:\,1],\, 0,\, [4\,:\,4]}\left[\begin{array}{c|l} 2^2 & \triangle(2,\, 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\, 0);\ - \\ y & \overline{} \\ & \triangle(2,\, \tfrac{1}{2}\pm\lambda);\ \tfrac{1}{2}\nu,-\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{4}+\epsilon\pm\tfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right]$$

$$=2\pi^{3/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda)J_\nu(2\sqrt{y}) \tag{3.3}$$

$$G^{2,\, 2,\, 0,\, 4,\, 2}_{2,\, [2\,:\,1],\, 0,\, [4\,:\,4]}\left[\begin{array}{c|l} 2^2 & \triangle(2,\, 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\, 0);\ 1-g_1 \\ y & \overline{} \\ & \triangle(2,\, \tfrac{1}{2}\pm\lambda); f_1, f_2,\ \tfrac{1}{4}+\epsilon\pm\tfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right]$$

$$=2\pi^{3/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda\}y^{1/2(-1+f_1+f_2)}e^{-1/2y}W_{k,m}(y) \tag{3.4}$$

जहाँ $$K=\tfrac{1}{2}(1+f_1+f_2)-g_1,\ m=\tfrac{1}{2}(f_1-f_2)$$

$$G^{2,\, 2,\, 0,\, 4,\, 1}_{2,\, [2\,:\,0],\, 0,\, [4\,:\,2]}\left[\begin{array}{c|l} 2^2 & \triangle(2,\, 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\, 0);\ - \\ y & \overline{} \\ & \triangle(2,\, \tfrac{1}{2}\pm\lambda);\ a-1,\ -b \end{array}\right]$$

$$=2\pi^{3/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda)\left\{\frac{\Gamma(a-\epsilon-\tfrac{1}{4}\pm\lambda)}{\Gamma(a+b)}y^{a-1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}a-\epsilon-\tfrac{1}{4}\mp\lambda \\ a+b\end{matrix};\ -y\right)\right. \tag{3.5}$$

$$G^{2,\ 2,1,\ 4,\ 1}_{2,\ [2\,:\,1],\ 0,\ [4\,:\,5]}\left[\begin{array}{c|l} 2^2 & \triangle(2,\ 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\ 0,);\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu \\ & \qquad\text{---} \\ y & \triangle(2,\ \tfrac{1}{2}\pm\lambda):\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu,\ \epsilon+\tfrac{1}{4}\pm\tfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right]$$

$$=2\pi^{3/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda)H_\nu(2\sqrt{y}) \qquad (3.6)$$

$$G^{2,\ 2,\ 0,\ 4,\ 2}_{2,\ [2\,:\,1],\ 0,\ [4\,:\,5]}\left[\begin{array}{c|l} 2^2 & \triangle(2,\ 2\epsilon) \\ y & \triangle(2,\ 0);\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu \\ & \qquad\text{---} \\ & \triangle(2,\ \tfrac{1}{4}\pm\lambda);\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu,\ \epsilon+\tfrac{1}{4}\pm\tfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right]$$

$$=2\pi^{3/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda)Y_\nu(2\sqrt{y}) \qquad (3.7)$$

$$G^{2,\ 2,\ 2,\ 4,\ 2}_{2,\ [2\,:\,2],\ 0,\ [4\,:\,6]}\left[\begin{array}{c|l} 1 & \triangle(2,\ 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\ a);\ \triangle(2,\ 1-2\epsilon+a+b_1+b_2) \\ y & \qquad\text{---} \\ & [\triangle(2,\ b_2)];\ \tfrac{1}{2}\nu,-\tfrac{1}{2}\nu,\ [\triangle(2,\ 2\epsilon-b_2)] \end{array}\right]$$

$$=2^{3-2a-b_1-b_2}\pi^{3/2}\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)K_\nu(2\sqrt{y}) \qquad (3.8)$$

$$G^{2,\ 2,\ 2,\ 4,\ 1}_{2,\ [2\,:\,2],\ 0,\ [4\,:\,6]}\left[\begin{array}{c|l} 1 & \triangle(2,\ 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\ a);\ \triangle(2,\ 1-2\epsilon+a+b_1+b_2) \\ y & \qquad\text{---} \\ & [\triangle(2,\ b_2)];\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ [\triangle(2,\ 2\epsilon-b_2)] \end{array}\right]$$

$$=2^{2-(2a+b_1+b_2)}\,\pi^{3/2}\Gamma(a+b_1)\,\Gamma(a+b_2)\,J_\nu(2\sqrt{y}) \qquad (3.9)$$

$$G^{2,\ 2,\ 2,\ 4,\ 2}_{2,\ [2\,:\,3],\ 0,\ [4\,:\,6]}\left[\begin{array}{c|l} 1 & \triangle(2,\ 2\epsilon) \\ & \triangle(2,a);\ \triangle(2,\ 1-2\epsilon+a+b_1+b_2),\ 1-g_1 \\ y & \qquad\text{---} \\ & [\triangle(2,\ b_2)];f_1,\ f_2,\ [\triangle(2,\ 2\epsilon-b_2)] \end{array}\right]$$

$$=2^{2-2a-b_1-b_2}\pi^{3/2}\Gamma(a+a_2)\,\Gamma(a+b_2)y^{\frac{1}{2}(f_1+f_2-1)}e^{-1/2y}\,W_{k,\,m}(y) \qquad (3.10)$$

जहाँ $K=\tfrac{1}{2}(1+f_1+f_2)-g_1,\ m=\tfrac{1}{2}f_1-\tfrac{1}{2}f_2$

$$G^{2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1}_{2,\ [2\,:\,3],\ 0,\ [4\,:\,7]}\left[\begin{array}{c|l} 1 & \triangle(2,\ 2\epsilon) \\ & \triangle(2,\ a);\ \triangle(2,\ 1-2\epsilon+a+b_1+b_2),\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu \\ y & \qquad\text{---} \\ & [\triangle(2,\ b_2)];\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu,\ [\triangle(2,2\epsilon-b_2)] \end{array}\right]$$

$$=2^{2-2a-b_1-b_2}\pi^{3/2}\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)H_\nu(2\sqrt{y}) \qquad (3.11)$$

$$G^{2,\ 2,\ 2,\ 4,\ 2}_{2,\ [2\,:\,3]\ 0,\ [4\,:\,7]}\left[\begin{array}{c|l} 1 & \triangle(2,\ 2\epsilon) \\ & \triangle(2,a);\ \triangle(2.\ 1-2\epsilon+a+b_1+b_2),\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu \\ y & \qquad\text{---} \\ & [\triangle(2,\ b_2)];\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu,-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu,\ [\triangle(2,\ 2\epsilon-b_2)] \end{array}\right]$$

$$=2^{2-2a-b_1-b_2}\pi^{3/2}\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)\,Y_\nu(2\sqrt{y}) \tag{3.12}$$

$$G^{1,1,1,2,2}_{1,[1:1],0,[2,4]}\left[\begin{matrix}1\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\epsilon\\ a;\ 1-\epsilon+a+b_1+b_2\\ \text{---}\\ b_1,\ b_2;\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \theta-b_1,\ \theta-b_2\end{matrix}\right]$$

$$=2\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)K_\nu(2\sqrt{y}) \tag{3.13}$$

$$G^{1,1,1,2,1}_{1,[1:1],0,[2:4]}\left[\begin{matrix}1\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\epsilon\\ a;\ 1-\epsilon+a+b_1+b_2\\ \text{---}\\ b_1,\ b_2;\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \theta-b_1,\ \theta-b_2\end{matrix}\right]$$

$$=\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)J_\nu(2\sqrt{y}) \tag{3.14}$$

$$G^{1,1,2,2,1}_{1,[1:2],0,[2:5]}\left[\begin{matrix}1\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\epsilon\\ a;\ 1-\epsilon+a+b_1+b_2,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu\\ \text{---}\\ b_1,\ b_2;\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu,\ \epsilon-b_1,\ \epsilon-b_2\end{matrix}\right]$$

$$=\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)H_\nu(2\sqrt{y}) \tag{3.15}$$

$$G^{1,1,1,2,2}_{1,[1:2],0,[2,5]}\left[\begin{matrix}1\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\epsilon\\ a;\ 1-\epsilon+a+b_1+b_2,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\nu\\ \text{---}\\ b_1,\ b_2;\ -\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu,\ \epsilon-b_1,\ \epsilon-b_2\end{matrix}\right]$$

$$=\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)Y_\nu(2\sqrt{y}) \tag{3.16}$$

$$G^{1,1,0,2,2}_{1,[1:2],0,[2:4]}\left[\begin{matrix}1\\ y\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\epsilon\\ a;\ 1-\epsilon+a+b_1+b_2,\ 1-g_1\\ \text{---}\\ b_1,\ b_2;\ f_1,f_2,\ \theta-b_1,\ \theta-b_2\end{matrix}\right]$$

$$=\Gamma(a+b_1)\Gamma(a+b_2)y^{1/2(f_1+f_2-1)}e^{-1/2y}W_{k,m}(y) \tag{3.17}$$

जहाँ $K=\tfrac{1}{2}(1+f_1+f_2)-g_1$ तथा $m=\tfrac{1}{2}f_2-\tfrac{1}{2}f_1$

$$\sum_{b_1,b_2}\frac{\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(1+f_1+\epsilon-a+b_1+b_2)}{\Gamma(1-a+b_2)\Gamma(\epsilon+f_1+b_2)}\ F_2\left[\begin{matrix}\epsilon+b_1+f_1,\ 1-a+b_1,\ 1-e_1+f_1,\ 1-b_2+b_1,\\ ,\ 1-f_2+f_1;\ 1;\ -y\end{matrix}\right]$$

$$={}_3F_2\left(\begin{matrix}+f_1+b_1,\ \epsilon+f_1+b_2,\ 1+f_1-e,\\ 1+f_1-f_2,\ 1+f_1+\epsilon-a+b_1+b_2\end{matrix};\ -y\right) \tag{3.18}$$

$$\sum_{b_1,b_2}\frac{\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(1+f_1+\epsilon-a+b_1+b_2)}{\Gamma(1-a+b_2)\Gamma(\epsilon+f_1+b_2)}$$

$$\times\psi_1\left(\begin{matrix}\epsilon+b_1+f_1,\ 1-a+b_1,\ 1-b_2+b_1,\ 1-f_2+f_1;\\ ;\ 1;\ y\end{matrix}\right)$$

$$={}_2F_2\left(\begin{matrix}\epsilon+f_1+b_1,\ \epsilon+f_1+b_2\\ 1+f_1-f_2,\ 1+f_1+\epsilon-a+b_1+b_2;\ -y\end{matrix}\right) \tag{3.19}$$

जहाँ F_2 तथा ψ_1 दो चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलन हैं ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० के० सी० शर्मा का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र के लिखने में पथ-प्रदर्शन किया।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस (इंडिया)**, 1965, **31**, 536-546.

2. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transendental Function 1, **मैकग्रा-हिल, न्यूयार्क** 1953.

3. गुप्ता, एस० सी० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० सांइंस (इंडिया) (प्रकाशनाधीन)**

4. सक्सेना, आर० के० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइस** (**इंडिया**), 1960, **26**, 400-413.

5. शर्मा, बी० एल० । Annales de la Soc. Science de Bruxelles, 1965, **79**, 26-40.

6. शर्मा, के० सी० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० सांइस** (**इंडिया**), 1964, **30**, 736-742.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 12, No 2, April 1969, Pages 61-67

H-फलनों एवं प्रथम प्रकार के शेबीशेफ बहुपदियों के कतिपय सम्बन्ध

मणिलाल शाह
गणित विभाग, पी० एम० बी० जी० कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—अक्टूबर 10, 1968]

सारांश

इस शोधपत्र में H-फलन एवं शेबीशेफ बहुपदी के गुणनफल वाले समाकल का मान ज्ञात किया गया है। इस समाकल को शेबीशेफ बहुपदियों की श्रेणी में H-फलन के विस्तार सूत्र को प्राप्त करने के लिए व्यवहृत किया गया है। विशिष्ट रोचक दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

On some relation of H-functions and Tchebichef polynomials of the first kind. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P. M. B. G. College, Indore.

In this paper an integral involving the product of H-function and Tchebichef polynomial has been evaluated. This integral has been employed to obtain an expansion formula for H-function in series of Tchebichef polynomials. Particular interesting cases have been also given.

1 विषय प्रवेश

हाल ही में फाक्स [(4), p. 408] ने H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में परिचित कराया है

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots\ldots\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots\ldots\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_js)}x^s\,ds \tag{1.1}$$

जिसमें x शून्य के तुल्य नहीं है और रिक्त गुणनफल की विवेचना इकाई के रूप में की जाती है; p, q, m, n धनात्मक पूर्ण संरख्याएँ जिससे $p \geqq n \geqq 0$, $q \geqq m \geqq 1$ की तुष्टि होती है; $\alpha_j(j=1, \ldots\ldots, p)$, $\beta_j(j=1, \ldots\ldots, q)$ धन पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $a_j(j=1, \ldots\ldots, q)$, $b_j(j=1\ldots\ldots, q)$ ऐसी संमिश्र संख्याएँ हैं कि $\Gamma(b_h-\beta_h s)$, $(h=1, \ldots\ldots, m)$ के पोल $\Gamma(1-a_i+\alpha_i s)$, $(i=1, \ldots\ldots, n)$, के किसी पोल से सम्पात करते हैं अर्थात्

$$\alpha_i(b_h+r) \neq (a_i-\eta-1)\beta_h, (\gamma, \eta=0, 1, \ldots\ldots; h=1, \ldots\ldots, m; i=1, \ldots\ldots, n). \quad (1.2)$$

यही नहीं, कंटूर L, $c-i\infty$ से $c+i\infty$ तक विस्तृत है जिससे कि बिन्दु

$$s=\frac{(b_h+\gamma)}{\beta_h}, \ (h=1, \ldots\ldots, m; \gamma=0, 1, \ldots\ldots) \quad (1.3)$$

जो $\Gamma(b_h-\beta_h s)$, $(h=1, \ldots\ldots, m)$ के पोल हैं वे दाईं ओर अवस्थित रहते हैं और विन्दु

$$s=\frac{(a_i-\eta-1)}{\alpha_i}, \ (i=1, \ldots\ldots, n; \ \eta=0, 1, \ldots\ldots) \quad (1.4)$$

जो $\Gamma(1-a_i+\alpha_i s)$, $(i=1, \ldots\ldots, m)$ के पोल हैं वे L के बाईं ओर अवस्थित होते हैं। ऐसा कंटूर (1.2) के कारण सम्भव है। H-फलन सम्बन्धी इन कल्पनाओं का पालन पूरे शोध पत्र में किया जावेगा।

हम H-फलन का संक्षेपण

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right] \quad (1.5)$$

के रूप में करेंगे जिसमें $\{(a_p, \alpha_p)\}$ द्वारा प्राचलों का समूह $(a_1, \alpha_1), \ldots\ldots, (a_p, \alpha_p)$ व्यक्त होता है और इसी तरह $\{(b_q, \beta_q)\}$ के लिए भी लागू होगा।

संकेत $\triangle(m, n)$ से प्राचलों का समूह व्यक्त होगा:—

$$\frac{n}{m}, \ \frac{n+1}{m}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n+m-1}{m}.$$

ब्राक्समा [(1), p. 278] के अनुसार

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right] = 0(|X|^{\alpha}) \quad \text{लघु } x \text{ के लिए}$$

जहाँ $$\sum_1^p \alpha_j - \sum_1^q B_j \leqq 0 \text{ तथा } \alpha = \min Re\left(\frac{b_h}{\beta_h}\right), \ (h=1, \ldots\ldots, m)$$

तथा

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right] = 0(|X|^{\beta}) \quad \text{दीर्घ } x \text{ के लिए}$$

जहाँ $\sum_1^p \alpha_j - \sum_1^q \beta_j < 0; \sum_1^n \alpha_j - \sum_{n+1}^p \alpha_j + \sum_1^m \beta_j - \sum_{m+1}^q \beta_j \equiv \lambda > 0, \ |\arg z| < \frac{1}{2}\lambda\pi$

तथा

$$\beta = \max Re\left(\frac{a_i - 1}{\alpha_i}\right), \ (i = 1, \ldots\ldots, n).$$

इस शोधपत्र का उद्देश्य H-फलन तथा शेबीशेफ बहुपदी वाले समाकल का मूल्यांकन H-फलन के रूप में करना है। इस समाकल की सहायता से H-फलन का विस्तार-सूत्र स्थापित किया गया है। कतिपय रोचक फल भी दिए गए हैं।

2. समाकल

इस अनुभाग में निम्नांकित समाकल का मान ज्ञात किया गया है। जो सूत्र व्युत्पन्न किया जाना है वह है :—

$$\int_0^1 x^\rho (1-x)^{-1/2} T_l(2x-1) H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\delta \,\middle|\, \begin{matrix} \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix} \right] dx \tag{2·1}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\delta^{1/2}} H_{p+2\delta, q+2\delta}^{m, n+2\delta}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (\triangle(\delta, -\rho), 1)(\triangle(\delta, -\rho - \frac{1}{2}), 1), \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}, (\triangle(\delta, -\rho - l - \frac{1}{2}), (\triangle(\delta, -\rho + l - \frac{1}{2}), 1) \end{matrix} \right]$$

जहाँ δ धन पूर्णसंख्या है, $\sum_1^p \alpha_j - \sum_1^q \beta_j \equiv \mathcal{J} \leqq 0, \ \sum_1^n \alpha_j - \sum_{n+1}^p \alpha_j + \sum_1^m \beta_j - \sum_{m+1}^q \beta_j \equiv \lambda > 0, \ |\arg z| < \frac{1}{2}\lambda\pi$,

$Re\left(\rho + \delta \frac{b_h}{\beta_h}\right) > -1, \ (h = 1, \ldots\ldots m)$ तथा $T_l(2x-1)$ प्रथम प्रकार का शेबीशेफ बहुपदी है।

उपपत्ति :

(2.1) को सिद्ध करने के लिये (2.1) के समाकल्य में H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1.1) के रूप में अभिव्यक्त करते हुये तथा समाकलनों का क्रम बदलते हुये जो (1.2) में दी गई शर्तों के अनुसार न्यायसंगत प्रतीत होता है या प्रक्रिया में निहित समाकलों के परम अभिसरण के कारण हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \beta_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s) z^s}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j + {}_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s)} \left\{ \int_0^1 x^{\rho + \delta s} (1-x)^{-1/2} T_l(2x-1) dx \right\} ds \tag{2·2}$$

प्राप्त होता है। अब ज्ञात फल [(3), p. 271, (1)] के आधार पर x समाकल का मान निकालते हुए

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{-1/2}T_n(2x-1)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a+1)\Gamma(a+3/2)}{\Gamma(a+n+3/2)\Gamma(a-n+3/2)}$$

$Re(a)>-1,$ के लिये मान्य है।

गामा फलनों [(2), p. 4, (11)] के लिये गास के गुणन-प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$\Gamma(mz)=(2a)^{1/2(1-m)}m^{mz-1/2}\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{i}{m}\right)$$

जहाँ m एक धन पूर्णसंख्या है, (2.2) का लघुकरण

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\delta^{1/2}}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\rho+1+i}{\delta}+s\right)\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\rho+3/2+i}{\delta}+s\right)z^s}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\rho+l+3/2+i}{\delta}+s\right)\times\prod_{i=0}^{\delta-1}\Gamma\left(\frac{\rho-l+3/2+i}{\delta}+s\right)}ds$$

में होता है जो H-फलन की परिभाषा (1.1) के अनुसार समाकल (2.1) का मान प्रदान करता है।

3. विस्तार

शेबीशेफ बहुपदियों की श्रेणी में H-फलन के प्रसार सूत्र को अनुभाग 2 में ज्ञात किये गये समाकल (2.1) की सहायता से उपलब्ध किया गया है।

जो प्रसार सूत्र स्थापित किया जाना है वह है :—

$$x^{\rho}H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\delta}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{3.1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\delta^{1/2}}\sum_{r=0}^{\infty}H_{p+2\delta,\,q+2\delta}^{m,n+2\delta}\left[z\left|\begin{matrix}(\triangle(\delta,-\rho+\frac{1}{2}),1),\ (\triangle(\delta,-\rho),1),\ \{(a_p,\alpha_p)\}\\\{(b_q,\beta_q)\},\ (\triangle(\delta,-\rho-r),1),\ (\triangle(\delta,-\rho+r),1)\end{matrix}\right.\right]\times T_r(2x-1),\ (0<x<1),$$

जहाँ δ धन पूर्णसंख्या है, $\sum_1^p \alpha_j-\sum_1^q \beta_j\equiv \mathcal{J}\leq 0,$

$$\sum_1^n \alpha_j-\sum_{n+1}^{p}\alpha_j+\sum_1^m\beta_j-\sum_{m+1}^{q}\beta_j\equiv\lambda>0,\ |\arg z|<\tfrac{1}{2}\pi\lambda$$

तथा $$Re\left(\rho+\delta\frac{b_h}{\beta_h}\right)>-1,\ (h=1,\ \ldots\ldots,\ m).$$

उपपत्ति :

माना कि

$$f(x)=x^{\rho}H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\delta}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\ \alpha_p)\}\\ \{(b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]=\sum_{r=0}^{\infty}C_rT_r(2x-1),\ (0<x<1). \tag{3.2}$$

समीकरण (3.2) मान्य है क्योंकि $f(x)$ शतत है और विवृत अन्तराल $(0, 1)$ में सीमागत विचरण वाला है। अब (3.2) में दोनों और $x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}T_l(2x-1)$ से गुणा करें तथा 0 से 1 तक x के सापेक्ष समाकलित करें। समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदलने पर जो बाईं ओर के लिए विहित है, हमें

$$\int_0^1 x^{\rho-1/2}(1-x)^{-1/2}T_l(2x-1)H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\delta}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\ \alpha_p)\}\\ \{(b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]dx \tag{3.3}$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}C_r\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}T_l(2x-1)T_r(2x-1)\,dx.$$

प्राप्त होगा। दाईं ओर शेबीशेफ बहुपदियों [(3), p. 272, (8)] के लाम्बिकता गुण का प्रयोग करने पर

$$\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}[T_n(2x-1)]^2dx=\tfrac{1}{2}\pi$$

जहाँ $n\neq 0$ तथा (2.1) की सहायता से (3.3) के बाईं ओर समाकल का मान निकालने पर

$$C_l=\frac{2}{\delta\sqrt{\pi}}\,H_{p+2\delta,\ q+2\delta}^{m,\ n+2\delta}\left[z\left|\begin{matrix}(\triangle(\delta,\ -\rho+\frac{1}{2}),\ 1),\ (\triangle(\delta,\ -\rho),\ 1),\ \{(a_p,\ \alpha_p)\}\\ \{(b_q,\ \beta_q)\},\ (\triangle(\delta,\ -\rho-l),\ 1),\ (\triangle(\delta,\ -\rho+l),\ 1)\end{matrix}\right.\right]. \tag{3.4}$$

(3.2) तथा (3.4) मी सहायता से प्रसार सूत्र (3.1) की प्राप्ति होती है।

4. सम्प्रयोग :

H-फलन अधिक सार्वीकृत रूप में है जिससे प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई ज्ञात विशिष्ट फलन प्राप्त होते हैं। (1.1) में $\alpha_j=\beta_h=1$, $(j=1,\ \ldots\ldots,\ p;\ h=1,\ \ldots\ldots q)$, रखने पर H-फलन माइजर के G-फलन में [(2), p. 207, (1)] घटित हो जाता है जो स्वयं ही ऐसे कई ज्ञात फलनों का अत्यधिक सार्वीकृत फलन है जो [(2), p. 215-222] विशुद्ध एवं सम्प्रयुक्त गणित में देखा जाता है। फलतः इस शोधपत्र में स्थापित सूत्र व्यापक प्रकृति के हैं।

हम निम्नांकित फलों का उल्लेख करते हैं जिनमें विशिष्ट फलनों एवं H-फलनों के मध्य के सबन्ध प्रदर्शित किये गये हैं जिनका उपयोग कतिपय विशिष्ट दशाओं के रूप में किया जावेगा।

$$H^{1,\,p}_{p,\,q+1}\left[x\left|\begin{matrix}\{(1-a_p,\ \alpha_p)\}\\(0,\ 1),\ \{(1-b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]\equiv\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j r)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\beta_j r)}\frac{(-x)^r}{r!}. \qquad (4.1)$$

मैटलैंड ने [(5), p. 287] उपर्युक्त श्रेणी पर विस्तार से विचार किया है और यह मैटलैंड का सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन कहलाता है। इसकी सांकेतिक अभिव्यक्ति निम्न प्रकार की जाती है:—

$${}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\{(a_p,\ \alpha_p)\}\\\{(b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix};\ -x\right].$$

$$H^{1,0}_{0,2}\left[x\left|\ (0,\ 1),\ (-\gamma,\ \mu)\right.\right]\equiv\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-x)^r}{r!\,\Gamma(1+\gamma+\mu r)}\equiv \mathcal{J}^{\mu}_{\gamma}\ (x) \qquad (4.2)$$

जहाँ $\mathcal{J}^{\mu}{}_{\gamma}(x)$ को मैटलैंड का सार्वीकृत बेसेल फलन [(6), p. 257] कहते हैं।

$\delta=1$ **पर** (2.1) **तथा** (3.1) **की विशिष्ट दशाएँ**

(i) m, n, q को क्रमशः $1, p, q+1$ द्वारा पुनःस्थापित करने पर तथा (4.1) को ध्यान में रखते हुये अन्य प्राचलों का उचित चुनाव करने पर

$$\int_0^1 x^{\rho}(1-x)^{-1/2}T_l(2x-1)\,{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\{(a_p,\ \alpha_p)\}\\\{(b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix};\ -zx\right]dx \qquad (4.3)$$

$$=\sqrt{(\pi)}H^{1,\,p+2}_{p+2,\,q+3}\left[z\left|\begin{matrix}(-\rho,\ 1),\ (-\rho-\frac{1}{2},\ 1),\ \{(1-a_p,\ \alpha_p)\}\\(0,\ 1),\ \{(1-b_q,\ \beta_q)\},\ (-\rho-l-\frac{1}{2},\ 1),\ (-\rho+l-\frac{1}{2},\ 1)\end{matrix}\right.\right].$$

$$x^{\rho}\,{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\{(a_p,\ \alpha_p)\}\\\{(b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix};\ -Zx\right] \qquad (4.4)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(x)}}\sum_{r=0}^{\infty}H^{1,\,p+2}_{p+2,\,q+2}\left[x\left|\begin{matrix}(-\rho+\frac{1}{2},\ 1),\ (-\rho,\ 1),\ \{(1-a_p,\ \alpha_p)\}\\(0,\ 1),\ \{(1-b_q,\ \beta_q)\},\ (-\rho-r,\ 1),\ (-\rho+r,\ 1)\end{matrix}\right.\right]T_r(2x-1)$$

जहाँ $\quad \sum_1^p \alpha_j-\sum_1^q\beta_j-1\equiv\mathcal{J}\leqq 0,\ \sum_1^p\alpha_j-\sum_1^q\beta_j+1\equiv\lambda>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}\lambda\pi,\ Re(\rho)>-1.$

(ii) $m=1,\ n=p=0,\ q=2,\ b_1=0,\ b_2=-b,\ \beta_1=1,\ \beta_2=\mu$ होने पर तथा (4.2) का प्रयोग करने से

$$\int_0^1 x^{\rho}(1-x)^{-1/2}T_l(2x-1)\mathcal{J}^{\mu}_{b}(zx)\,dx$$

$$=\sqrt{\pi}H^{1,2}_{2,4}\left[z\left|\begin{matrix}(-\rho,\ 1),\ (-\rho-\frac{1}{2},\ 1)\\(0,\ 1),\ (-b,\ \mu),\ (-\rho-l-\frac{1}{2},\ 1),\ (-\rho+l-\frac{1}{2},\ 1)\end{matrix}\right.\right]. \qquad (4.5)$$

$$x^{\rho} \mathcal{J}^{\mu}{}_{b}(zx)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathcal{J}_{b}^{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} H_{2, 4}^{2, 1}\left[z \left|\begin{matrix}(-\rho+\frac{1}{2}, 1), (-\rho, 1) \\ (0, 1), (-b, \mu), (-\rho+r, 1), (-\rho-r, 1)\end{matrix}\right.\right] T_{r}(2x-1)$$

जहाँ $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ तथा $Re(\rho) > -1$. (4.6)

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वी० एम० भिसे का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. बेंक्समा, बी० एल० जे०। काम्पोस० मैथ०, 1963, **15**, 239-341
2. एर्डेल्यी, ए०। Higher Transcendental Functions. भाग I, मैकग्राहिल, न्यूर्याक, 1953.
3. वही। Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.
4. फाक्स, सी०। ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.
5. राइट, ई० एम०। लन्दन मैथ० सोसा०, 1958, **10**, 286-293,
6. वही। प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1935, **38**, 257-270.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 2, April 1969, Pages 69-71

लेथाइरस सटाइवस के बीजों में उपस्थित लेसिथिन का अध्ययन

सूरज प्रकाश बिल्ला
एवं
कृष्ण बहादुर
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, प्रयाग

[प्राप्त—जनवरी 2, 1969]

सारांश

लेथाइरस सटाइवस के बीजों के क्लोरोफार्म एवं मेथिल ऐल्कोहल (2:1) के निष्कर्षण से प्राप्त तेल जैसे द्रव से फास्फोलिपिड प्राप्त किया गया। इसकी सिलिका जेल एवं मैग्नीशियम ट्राइसिलिकेट (5:5) की स्तम्भ क्रोमैटोग्राफी से लेसिथिन प्राप्त किया गया।

Abstract

Study of Lecithin present in the seeds of Lathyrus sativus. *By* Suraj Prakash Billa and Krishna Bahadur, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

The seeds of Lathyrus sativus on extraction with chloroform and methanol (2:1) produce an oily substance which is soluble in absolute alcohol. The phosholipid was separated by treating this oily mass with 0·2% potassium chloride solution. The lecithin thus obtained was purified by column chromatography by means of silica gel and magesium trisilicate (5:5).

लिपिड वसा अम्लों के यौगिक होते हैं अथवा लिपिड वह प्राकृतिक पदार्थ होते हैं जिनकी उत्पत्ति उच्च वसा अम्लों से होती है। जिन लिपिडों में फास्फोरस होता है उनको फास्फोलिपिड कहते हैं। ये 'यौगिक लिपिड' के वर्ग के अन्तर्गत आते हैं, जिनके मुख्य सदस्य सिफलिन और लेसिथिन हैं। साधारणतया इनकी रचना वसा अम्लों के दो अणु, फास्फोरिक अम्ल के एक अणु तथा ग्लिसराल के एक अणु के मिलने से होती है। इनमें ग्लिसराल की अल्फा, बीटा स्थितियाँ फास्फोरिक अम्ल तथा क्षारक से बदली होती हैं। यदि क्षारक कोलऐमीन [$-CH_2OH. CH_2NH_2$] हो तो इस प्रकार से बने लिपिड को सिफलिन कहते हैं किन्तु यदि क्षारक कोलीन [$CH_2OH\ N^+(CH_3)OH^-$] हो तो लेसिथिन कहलाते हैं। सिफलिन मस्तिष्क कोशिकाओं की वृद्धि में तथा रक्त के थक्के बनने में सहायता देता है[1] जबकि लेसिथिन आँत में विटामिन ए के शोषण को बढ़ाता है।[2]

लेथाइरस सटाइवस (खेसारी अथवा चपरी) के बीजों को पीसकर क्लोरोफार्म एवं मेथिल ऐल्कोहल के मिश्रण (2:1) द्वारा साक्सलेट में निष्कर्षित किया गया जिससे बीजों का कुछ अंश क्लोरोफार्म एवं मेथिल ऐल्कोहल के मिश्रण में चला गया। क्लोरोफार्म एवं मेथिल ऐल्कोहल के मिश्रण को आसवित करने पर एक तेल-जैसा द्रव प्राप्त हुआ।

फास्फोलिपिड का पृथक्करण

उपर्युक्त तेल जैसे द्रव को एक पृथक्कारी कीप में लेकर 0·2 प्रतिशत पोटैशियम क्लोराइड़ के घोल में मिलाया गया और फिर इस मिश्रण को दो घन्टे तक रक्खा गया जिससे लिपिड का प्रभाज अ-लिपिड के प्रभाज से अलग हो जाय। फास्फोलिपिड को उपर्युक्त प्राप्त लिपिड प्रभाज में से ऐसीटोन द्वारा दूसरे लिपिडों से पृथक कर लिया गया।

लेसिथिन का पृथक्करण

प्राप्त फास्फोलिपिड में परम ऐल्कोहल मिलाया गया। इससे लेसिथिन को जो कि परम ऐल्कोहल में विलेय है, छानकर दूसरे फास्फोलिपिडों से पृथक कर लिया गया और फिर ऐसीटोन मिला कर लेसिथिन को अवक्षेपित कर लिया गया। लेसिथिन को परम ऐल्कोहल में घोलकर उसमें कैडमियम क्लोराइड मिलाया गया। फिर लेसिथिन को छानकर कार्बनिक पदार्थ से पृथक कर लिया गया। छनित में ऐसीटोन मिलाने पर लेसिथिन को पुनः अवक्षेपित कर लिया गया।

लेसिथिन को उसके सिलिका जेल एवं मैग्नीशियम ट्राइसिलिकेट (5:5) के मिश्रण की स्तम्भ क्रोमैटोग्राफी द्वारा क्लोरोफार्म एवं मेथिल ऐल्कोहल (2:1) के मिश्रण से शुद्ध रूप में प्राप्त किया गया। क्लोरोफार्म एवं मेथिल ऐल्कोहल में प्राप्त लेसिथिन को ऐसीटोन द्वारा पुनः अवक्षेपित किया गया। प्राप्त लेसिथिन को निर्वात जलशोषित्र में शुष्क किया गया। इसकी मात्रा 34·16 प्रतिशत निकली।

लेसिथिन के गुणधर्म

लेसिथिन एक मोम-जैसा पदार्थ है जो वसा विलायकों में, जैसे बेंजीन, क्लोरोफार्म, मेथिल ऐल्कोहल, परम ऐल्कोहल आदि में तो विलेय है परन्तु ऐसीटोन में अविलेय है। लेसिथिन निष्कर्षित करते समय इसका रंग सफेद रहता है परन्तु धीरे-धीरे यह पीला और फिर आक्सीकरण होने से अन्त में भूरा हो जाता है। यह एक ऐलीफेटिक पदार्थ है जो गर्म करने पर विच्छेदित हो जाता है जिससे उसके अनिश्चित गलनांक का पता चलता है।

लेसिथिन सोडियम बाइकार्बोनेट एवं फेलिंग विलयन के साथ कोई क्रिया नहीं करता, जिससे यह पता चलता है कि उसमें अम्लीय एवं ऐल्डिहाइडी समूह उपस्थित नहीं हैं। यह एक असंतृप्त यौगिक है क्योंकि यह पोटैशियम परमैंगनेट एवं ब्रोमीन जल को रंगहीन कर देता है।

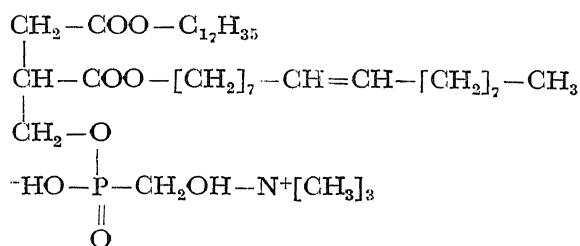
लेसिथिन को $0{\cdot}5N$ ऐल्कोहलीय पोटैशियम हाइड्राक्साइड़ के विलयन के द्वारा बालू-ऊष्मक पर दो घन्टे तक साबुनीकृत किया गया। साबुनीकरण के पश्चात् प्राप्त वसा अम्लों की पत्र-क्रोमैटोग्राफी द्वारा स्टियरिक एवं ओलीक वसा अम्लों की उपस्थिति ज्ञात की गई।

लेसिथिन का एन० एम० आर० वर्णक्रम

सिग्नल ppm. τ मान में	प्रोटान संख्या	सिग्नल ppm. τ मान में	प्रोटान संख्या
7.85	3	9·94	1
8·73	4	9·11	1
8·66	3	9·90	2
3·93	1	8·78	5
3·34	4	4·49	2
2·14	7	4·68	1
2·15	2	8·89	2
10·1	3	9·02	1
10·41	1		

7·0 से 10·5 τ मान $-CH_2$ एवं $-CH_3$ प्रोटानों की उपस्थिति को व्यक्त करते हैं। 4·0 से 5·0 τ मान —CH प्रोटान की उपस्थिति व्यक्त करते हैं। 3·5 से 4·0 τ मान —NH अन्त्यों वाले प्रोटान की उपस्थिति व्यक्त करते हैं। 3·0 से 3·5 τ मान —OH या $-CH_2.OH$ प्रोटान की उपस्थिति व्यक्त करते हैं। 2·0 से 3·0 τ मान $-CH_2$ या —COOMe प्रोटान की उपस्थिति व्यक्त करते हैं[3]।

उपर्युक्त परिणाम से लेसिथिन यौगिक का सम्भव सूत्र निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :—

$$
\begin{array}{l}
CH_2-COO-C_{17}H_{35} \\
| \\
CH-COO-[CH_2]_7-CH=CH-[CH_2]_7-CH_3 \\
| \\
CH_2-O \\
\qquad\ | \\
{}^{-}HO-P-CH_2OH-N^+[CH_3]_3 \\
\qquad\ \| \\
\qquad\ O
\end{array}
$$

निर्देश

1. सरकार, एन० के०, चटर्जी जी० एवं बनर्जी, आर०। **युनि० कलकत्ता जे०, मिचिगन स्टेट मेड० सोसा०,** 1957, 56, 1451.
2. एडलर्सबर्ग, डी० के० एवं सोबोटका, एच०। **जे० ग्रेस्ट्रोएन्ट्रोलोजी, न्यूयार्क** 1948, **10**, 822-30
3. ब्रांड, जे० सी० डी० एवं एगलिनटन, जी०। Application of Spectroscopy to Organic Chemistry. **ओल्डबोल्ड प्रेस, लन्दन,** 1965, पृ० 68-84

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 2, April 1969, Pages 73-76

संवलन प्रकार के कतिपय समाकल समीकरण

एस० एल० कल्ला
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—फरवरी 8, 1968]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य समाकल समीकरण

$$\int_a^x \psi(t)(x^2-t^2)^{\mu/2} \mathcal{J}_\mu\{k\sqrt{(x^2-t^2)}\} \exp\{-b(x^2-t^2)\}dt=\phi(x)$$

का हल निम्नांकित रूप में प्राप्त करना है :

$$\psi(x)=k^2x\int_a^x t\,\phi(t)(x^2-t^2)^{-1/2(\mu+2)} \exp\{-b(x^2-t^2)\}\, I_{-(\mu+2)}\{k\sqrt{(x^2-t^2)}\}dt.$$

समाकल समीकरण

$$\int_x^c \psi(t)(t^2-x^2)^{\mu/2} \mathcal{J}_\mu\{k\sqrt{(t^2-x^2)}\} \exp\{-b(t^2-x^2)\}\, dt=h(x)$$

का हल भी दिया गया है

Abstract

On certain integral equations of convolution type. *By* S. L. Kalla, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

The object of the present paper is to obtain the solution of integral equation

$$\int_a^x \psi(t)(x^2-t^2)^{\mu/2} \mathcal{J}_\mu\{k\sqrt{(x^2-t^2)}\}\exp\{-b(x^2-t^2)\}dt=\phi(x)$$

as

$$\psi(x)=k^2x\int_a^x t\,\phi(t)(x^2-t^2)^{-(\mu+2)/2} \exp\{-b(x^2-t^2)\}\, I_{-(\mu+2)}\{k\sqrt{(x^2-t^2)}\}dt.$$

A solution of the integral equation

$$\int_x^c \psi(t)(t^2-x^2)^{\mu/2} \mathcal{J}_\mu\{k\sqrt{(t^2-x^2)}\} \exp\{-b(t^2-x^2)\}dt=n(x)$$

is also given here.

1. कुछ फलनों में कतिपय संवलन परिवर्तों का व्युत्क्रमण सम्भव होता है । ता ली[1] ने इसे ऐसी अष्टि के लिए सिद्ध किया है जो शेबाइशेफ-बहुपदी है और बुशमान[2] ने ऐसा ही फलन लेगेन्ड्र बहुपदी के लिए प्राप्त किया है।

इस शोधपत्र का उद्देश्य संवलन प्रकार के समाकल समीकरणों के लिये हल प्राप्त करना है। यह विश्लेषण औपचारिक है । प्राप्त हलों को हमेशा ही मूल समाकल समीकरणों में प्रतिस्थापन द्वारा सम्पुष्ट किया जा सकता है ।

हम लैप्लास परिवर्त

$$\phi(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \quad R(p)>0, \tag{1·1}$$

को $L\{f\}$ या $\bar{f}$ द्वारा व्यक्त करेंगे ।

हमें निम्नांकित फल [3, p. 185(30)] की आवश्यकता होगी :

$$L\{t^{1/2\mu}\mathcal{J}_\mu(kt^{1/2})\}=\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2\mu} \exp\left\{-\frac{k^2}{4p}\right\}p^{-\mu-1}, \quad R(\mu)>-1 \tag{1·2}$$

2. समाकल समीकरण

$$\int_a^x \psi(t)(x^2-t^2)^{1/2\mu} \exp\{-b(x^2-t^2)\} \mathcal{J}_\mu\{k\sqrt{(x^2-t^2)}\}dt=\phi(x) \tag{2·1}$$

का हल

$$\psi(x)=k^2x\int_a^x t\,\phi(t)(x^2-t^2)^{-(\mu+2)/2} \exp\{-b(x^2-t^2)\} I_{-(\mu+2)}\{k\sqrt{(x^2-t^2)}\}dt. \tag{2·2}$$

होगा ।

उपपत्ति : इसे सिद्ध करने के लिये (2·1) में

$$x^2-a^2=y, \; t^2-a^2=z, \; \frac{\psi(t)}{t}=m(z) \text{ तथा } 2\phi(x)=n(y)$$

रखने से

$$\int_0^y m(z)(y-z)^{\mu/2} \exp\{-b(y-z)\}\mathcal{J}_\mu\{k\sqrt{(y-z)}\}dz=n(y) \tag{2·3}$$

प्राप्त होगा जो संवलन प्रकार का समाकल समीकरण है। अब दोनों ओर का लैप्लास परिवर्त निकालने पर तथा संवलन प्रमेय [4, p. 30] प्रयुक्त करने पर

$$\bar{m}\, L\{y^{\mu/2}\, e^{-by}\, J_\mu(ky^{1/2})\} = \bar{n} \tag{2·4}$$

प्राप्त होगा जिसमें फल (1·2) का प्रयोग करने पर

$$\bar{m} = \left(\frac{2}{k}\right)^{\mu} \exp\{k^2/4(p+b)\}(p+b)^{\mu+1}\,\bar{n} \tag{2·5}$$

जिसे (1·2) के बल पर निम्नांकित रूप में लिखा जा सकता है

$$\bar{m} = (2/k)^{\mu}\, L\{(ik/2)^{\mu+2}\, y^{-(\mu+2)/2}\, J_{-(\mu+2)}\,(iky^{1/2})\, e^{-by}\}\bar{n} \tag{2·6}$$

अतः संवलन प्रमेय के द्वारा

$$m(y) = (k/2)^2 \int_0^y (y-z)^{-(\mu+2)/2} \exp\{-b(y-z)\}\, I_{-(\mu+2)}\,\{k\sqrt{(y-z)}\}n(z)dz \tag{2·7}$$

प्राप्त होगा। प्रारम्भिक चरों को रखने पर हमें (2·2) प्राप्त होगा।

3. समाकल समीकरण

$$\int_x^c \psi(t)(t^2-x^2)^{\mu/2}\, I_\mu\{k\sqrt{(t^2-x^2)}\}\, \exp\,\{-b(t^2-x^2)\}dt = h(x) \tag{3·1}$$

का हल

$$(\psi t) = k^2 t \int_t^c xh(x)\,(x^2-t^2)^{-(\mu+2)/2}\, J_{-(\mu+2)}\,\{k\sqrt{(x^2-t^2)}\}\, \exp\,\{-b(x^2-t^2)\}dx \tag{3·2}$$

होगा।

उपपत्ति : हल करने के लिये हम यह कल्पना करते हैं कि

$$x^2 = u, \quad t^2 = v, \quad \psi(t)/t = g(v), \quad 2h(x) = H(u)$$

और इनको (3·1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_u^{c^2} g(v)\,(v-u)^{\mu/2}\, I_\mu\{k\sqrt{(v-u)}\}\, \exp\,\{-b(v-u)\}dv = H(u) \tag{3·3}$$

प्राप्त होता है

पुनः $v=-y,\ u=-z,\ c^2=-a,\ g(v)=F(y),\ H(u)=M(z)$ रखने से

$$\int_a^z F(y)(z-y)^{\mu/2}\, I_\mu\{k\sqrt{(z-y)}\}\, \exp\{-b(z-y)\}dy = M(z)$$

अथवा

$$\int_a^z F(y)(z-y)^{\mu/2} \mathcal{J}_\mu\{ik\sqrt{(z-y)}\} \exp\{-b(z-y)\}dy = i^\mu M(z)$$

निम्नांकित फल के बल पर प्राप्त होगा :-

$$I_v(x) = i^{-v} \mathcal{J}_v(ix)$$

अतः (2·3) तथा (2·7) के द्वारा इसका हल

$$F(y) = -\frac{i^\mu k^2}{4}\int_a^y (y-z)^{-(\mu+2)/2} \exp\{-b(y-z)\} \; I_{-(\mu+2)}\{ik\sqrt{(y-z)}\}M(z)\, dz$$

के रूप में प्राप्त होता जिससे

$$g(v) = -\frac{i^\mu k^2}{4}\int_v^{c^2} (u-v)^{-(\mu+2)/2} \exp\{-b(u-v)\} \; I_{-(\mu+2)}\{ik\sqrt{(u-v)}\} \; H(u)du$$

अथवा $$g(v) = \frac{k^2}{4}\int_v^{c^2} (u-v)^{-(\mu+2)/2} \exp\{-b(u-v) \; \mathcal{J}_{-(\mu+2)}\{k\sqrt{(u-v)}\} \; H(u)du$$

प्रारम्भिक चरों को प्रतिस्थापित करने पर (3·2) प्राप्त होगा ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में प्रो० आर० एस० कुशवाहा ने जो रुचि दिखाई उसके लिये लेखक उनका कृतज्ञ है ।

निर्देश

1. ता ली । **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1960, **11**, 290-98.
2. बुशमैन, आर० जी० । **अमे० मैथ० (मासिक)**, 1962, **69**, 288-89.
3. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Tables of Integral Transforms, **भाग** I, **मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954.
4. स्नेडान, आई० एन० । Fourier Trasnforms, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1951.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 2, April 1969, Pages 77-82

बेसेल फलनों के प्रसार सूत्र

एस० डी० बाजपेयी
गणित विभाग, रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, कुरुक्षेत्र

[प्राप्त—नवम्बर 10, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में कुछ फलनों की लाम्बिकता के आधार पर बेसेल फलनों के कुछ प्रसार सूत्र प्राप्त किए गए हैं।

Abstract

On expansion formulae of Bessel functions. *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, Regional Engineering College, Kurukshetra.

In this paper some expansion formulae of Bessel functions have been obtained, with the help of orthogonality properties of some functions.

1. **विषय-प्रवेश** : इस शोधपत्र में बेसेल फलनों के कतिपय प्रसार सूत्रों की स्थापना की गई है। जो विधियाँ काम में लाई गई हैं उनका विश्लेषण में सर्वमान्य महत्व है क्योंकि वे कोज्या फलनों, बेसेल फलनों तथा लेगेण्ड्र फलनों की लाम्बिकता गुणों पर आधारित हैं। इस शोधपत्र में विकसित विधियों की सहायता से बेसेल फलनों के लिये प्रचुर संख्या में प्रसार सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं। यहाँ केवल कुछ रोचक प्रसार सूत्र दिये जावेंगे।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित सूत्र प्राप्त किये गए हैं :

$$J_{2\nu}(2z\cos t)\cos^{2n}t$$

$$=\frac{(2\nu+1)_n z^{2\nu}}{2^{2n+2\nu-1}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+\nu+r+1)\Gamma(n+\nu-r+1)}$$

$$\times {}_2F_3\left[\begin{matrix}n+\nu+\frac{1}{2},\ n+\nu+1\\ 2\nu+1,\ n+\nu+r+1,\ n+\nu-r+1\end{matrix};-z^2\right]\cos 2rt \qquad (2\cdot1)$$

$R(n+\nu)>-\frac{1}{2}$.

$$\mathcal{J}_{2\nu}(2z\sin t)=4\sum_{r=1}^{\infty}\cos r\pi\ \mathcal{J}_{\nu+r}(z)\ \mathcal{J}_{\nu-r}(z)\ \cos 2rt, \tag{2·2}$$

$Re\ \nu>-\frac{1}{2}$.

उपपत्ति : माना कि

$$f(t)=\mathcal{J}_{2\nu}(2z\cos t)\ \cos^{2n} t=\sum_{r=1}^{\infty} A_r \cos 2rt. \tag{2·3}$$

समीकरण (2·3) वैध है क्योंकि $f(t)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(0, \frac{1}{2}\pi)$ में परिसीमित चरण वाला है।

अब (2·3) में दोनों ओर $\cos 2st$ से गुणा करने पर तथा 0 से $\frac{1}{2}\pi$ के बीच t के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें

$$\int_0^{\pi/2} \mathcal{J}_{2\nu}(2z\cos t)\ \cos^{2n} t\ \cos 2st\ dt=\sum_{r=1}^{\infty} A_r\int_0^{\pi/2} \cos 2rt\ \cos 2st\ dt.$$

प्राप्त होगा। कोज्या फलनों के लाम्बिकता गुण तथा सूत्र [2, p. 294, (1)], अर्थात्

$$\int_0^{1/2\pi} \mathcal{J}_{2\nu}(2z\cos t)\ \cos^{2\alpha} t\ \cos 2\beta t\ dt=\frac{\pi(2\nu+1)_{2\alpha}\, z^{2\nu}}{2^{2\alpha+2\nu+1}\,\Gamma(\alpha+\nu+\beta+1)\ \Gamma(\alpha+\nu-\beta+1)}$$
$$\times {}_2F_3\left[\begin{matrix}\alpha+\nu+\frac{1}{2},\ \alpha+\nu+1\\ 2\nu+1, \alpha+\nu+\beta+1,\ \alpha+\nu-\beta+1\end{matrix};-z^2\right],$$

$Re(\nu+\alpha)>-\frac{1}{2}$, का प्रयोग करने पर हमें

$$A_s=\frac{(2\nu+1)_n\, z^{2\nu}}{2^{2n+2\nu-1}\,\Gamma(n+\nu+s+1)\ \Gamma(n+\nu-s+1)}\ {}_2F_3\left[\begin{matrix}n+\nu+\frac{1}{2},\ n+\nu+1\ ;\ -z^2\\ 2\nu+1,\ n+\nu+s+1,\ n+\nu-s+1\end{matrix}\right] \tag{2·4}$$

प्राप्त होगा। (2·3) तथा (2·4) की सहायता से तुरन्त ही सूत्र (2·1) निकल आवेगा।

सूत्र (2·2) को ऊपर दी गई विधि के सम्प्रयोग एवं फल [1, p. 360 (14)] के व्यवहार से स्थापित किया जावेगा।

(2·1) में $n=0$ रखने एवं [2, p. 24, (18)] का प्रयोग करने पर

$$\mathcal{J}_{2\nu}(2z\cos t)=2\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{J}_{\nu+r}(z)\ \mathcal{J}_{\nu-r}(z)\ \cos 2rt, \tag{2·5}$$

$Re\ \nu>-\frac{1}{2}$.

3. इस अनुभाग में निम्नांकित सूत्रों की स्थापना की जावेगी :-

$$t^{\mu-1}(1-t)^{\nu+1}\mathcal{J}_\nu[a(1-t)]=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}{\Gamma(\mu+\nu+2)}\times\sum_{r=1}^{\infty}r^{-1/2}\frac{\mathcal{J}_{\mu+\nu+1/2}(r)}{[\mathcal{J}_{\nu+1}(r)]^2}\mathcal{J}_\nu(rt) \quad (3\cdot1)$$

$Re\ \nu>-1,\quad Re\ \mu>-\frac{1}{2}$.

$$t^{\mu-1}(1-t)^{-\mu-1}\mathcal{J}_\nu[a(1-t)]=\frac{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu-\mu)}{\sqrt{(\pi)}\Gamma(\mu+\nu+1)}\times\sum_{r=1}^{\infty}r^{\mu}\frac{\mathcal{J}_\nu(r)\mathcal{J}_\nu(rt)}{[\mathcal{J}_{\nu+1}(r)]^2} \quad (3\cdot2)$$

$Re\ \nu>Re\ \mu>-\frac{1}{2}$.

उपपत्ति :

$$f(t)=t^{\mu-1}(1-t)^{\nu+1}\mathcal{J}_\nu[a(1-t)]=\sum_{r=1}^{\infty}A_r\mathcal{J}_\nu(rt) \quad (3\cdot3)$$

समीकरण (3·3) वैध है क्योंकि $f(t)$ संतत है और विवृत अन्तराल (0, 1) में परिसीमित विचरण वाला है।

(3·3) में दोनों ओर $t\ \mathcal{J}_\nu(st)$ से गुणा करने, 0 से 1 तक t के सापेक्ष समाकलन करने, [1, p. 354, (29)] तथा बेसेल फलनों के लाम्बिकता गुण [2, p. 291, (5)] अर्थात्

$$\int_0^1 x\mathcal{J}_\nu(ax)\mathcal{J}_\nu(\beta x)\,dx\begin{cases}=0, \text{ यदि } \beta\neq a,\\ =\frac{1}{2}[\mathcal{J}_{\nu+1}(a)]^2, \text{ यदि } \beta\neq a,\end{cases}$$

का उपयोग करने पर हमें (3·4) की प्राप्ति होगी :

$$A_s=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{3}{2})s^{-1/2}}{\Gamma(\mu+\nu+2)[\mathcal{J}_{\nu+1}(s)]^2}\mathcal{J}_{\mu+\nu+1/2}(s). \quad (3\cdot4)$$

अब (3·3) तथा (3·4) से फल (3·1) की प्राप्ति की जाती है।

सूत्र (3·2) को ऊपर दी गई विधि के सम्प्रयोग से एवं [1, p. 355, (30)] के व्यवहार से प्राप्त किया जावेगा।

4. इस अनुभाग में जिन सूत्रों की स्थापना की जावेगी वे हैं :

$$x^\rho\mathcal{J}_\nu(bx)=2^\rho\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a^r b^{-r-\rho}\Gamma\frac{1}{2}(r+\nu+\rho)}{\Gamma(r)\Gamma\{1-(r-\nu+\rho)/2\}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(r+\nu+\rho),\ \frac{1}{2}(r-\nu+\rho)\\ r+1\end{matrix};\frac{a^2}{b^2}\right]\mathcal{J}_r(ax), \quad (4\cdot1)$$

$Re(\nu+\rho)>0,\quad Re\ \rho<2,\quad 0<a<b$.

$$x^{2\nu+2}\mathcal{J}_\nu(bx)K_\nu(ax)K_\nu(bx)$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2^r a^{2r}\Gamma(r+1)/2\Gamma\{(2r+1)/2\}\Gamma(3r+1)/2}{b^{4r+2}\Gamma(r+1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}r+\frac{1}{2},\ (3r+1)/2\\ 2r+1\end{matrix};1-\frac{b^4}{a^4}\right]\mathcal{J}_r(ax), \quad (4\cdot2)$$

$0<a<b$.

उपपत्ति : माना कि

$$f(x)=x^{\rho}\mathcal{J}_{\nu}(bx)=\sum_{r=1}^{\infty}A_r\mathcal{J}_r(ax) \tag{4·3}$$

समीकरण (4·1) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है तथा विवृत अंतराल $(0, \infty)$ में परिसीमित विचरण वाला है ।

(4·3) में दोनों ओर $x^{-1}\mathcal{J}_s(ax)$ से गुणा करने, 0 से ∞ तक x के सापेक्ष समाकलन करने तथा [1, p. 349, (1)] एवं बेसेल फलनों [2, p, 291, (6)], अर्थात्

$$\int_0^{\infty}t^{-1}\mathcal{J}_{\nu}(ax)\,\mathcal{J}_{\mu}(ax)dx\begin{cases}=0, \text{ यदि } \mu\neq\nu,\\ =\tfrac{1}{2}\nu \text{ यदि } \mu=\nu,\end{cases}$$

के लाम्बिकता गुण का उपयोग करने पर

$$A_s=\frac{2^{\rho}a^s b^{-s-\rho}\,\Gamma\frac{1}{2}(s+\nu+\rho)}{\Gamma(s)\Gamma[1-(s-\nu+\rho)/2]}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(s+\nu+\rho),\ \frac{1}{2}(s-\nu+\rho);\ (a^2/b^2)\\ s+1\end{matrix}\right]. \tag{4·6}$$

अब (4·3) तथा (4·4) के द्वारा सूत्र (4·1) को प्राप्त किया जाता है ।

सूत्र (4·2) को ऊपर दी गई विधि के सम्प्रयोग से एवं [1, p. 373, (10)] को व्यवहृत करके स्थापित किया जाता है ।

5. इस अनुभाग में प्राप्त किये जाने वाले सूत्र हैं :—

$$\frac{x\sin[a(x+\beta)]}{x+\beta}\mathcal{J}_{n+1/2}(x)=\tfrac{1}{2}\pi\sum_{r=1}^{\infty}(2r+1)[\mathcal{J}_{r+1/2}(\beta)]^2\mathcal{J}_{r+1/2}(x), \tag{5·1}$$

$$2\leqslant a<\infty.$$

$$\frac{\mathcal{J}_{\mu+1/2}[x+\beta]}{x^{\nu-1/2}(x+\beta)^{\mu+1/2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2r+1)\Gamma(\mu+r+1)}{\Gamma(r+1)\ \beta^{r+\nu+1/2}}\mathcal{J}_{\mu+r+1/2}(\beta)\,\mathcal{J}_{r+1/2}(x). \tag{5·2}$$

$Re(\mu+\nu)>-1.$

उपपत्ति : माना कि

$$f(x)=\frac{x\sin[a(x+\beta)]}{x+\beta}\mathcal{J}_{n+1/2}(x)=\sum_{r=1}^{\infty}A_r\mathcal{J}_{r+1/2}(x). \tag{5·3}$$

समीकरण (5·3) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(-\infty, \infty)$ में परिसीमित विचरण वाला है ।

(5·3) में दोनों ओर $x^{-1}\mathcal{J}_{n+1/2}(x)$, से गुणा करने, $-\infty$ से ∞ तक x के सापेक्ष समाकलन करने, तथा [1, p. 346, (45)] एवं बेसेल फलनों [2, p. 391, (7)], अर्थात्

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-1}\mathcal{J}_{m+1/2}(x)\,\mathcal{J}_{m+1/2}(x)\,dx \begin{cases} =0, \text{ यदि } m\neq n, \\ =\dfrac{2}{2n+1}, \text{ यदि } m=n, \end{cases}$$

के लाम्बिकता गुण का उपयोग करने पर (5·4) प्राप्त होगा :

$$A_n=\tfrac{1}{2}\pi(2n+1)[\mathcal{J}_{n+1/2}(\beta)]^2. \tag{5·4}$$

(5·3) तथा (5·4), के द्वारा फल (5·1) तुरन्त अनुगमित होता है।

सूत्र (5·2) को उपर्युक्त विधि का सम्प्रयोग करके तथा फल [1, p. 355, (32)] के संशोधित रूप को प्रयुक्त करके प्राप्त किया जाता है।

6. अन्त में जिस सूत्र को प्राप्त करना है वह है

$$(1+x)^{1/2\mu-1}\,\mathcal{J}_\nu\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^{1/2}\right]=\frac{2^{\mu/2-\nu-1}[\Gamma\frac{1}{2}(\mu+\nu)]^2}{\Gamma(\nu+1)}$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+r+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-r\right)}\,{}_2F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\mu+\nu),\ \frac{1}{2}(\mu+\nu)\\ \nu+1,\frac{1}{2}(\mu+\nu)+r+1,(\mu+\nu)/2-r\end{matrix};-\tfrac{1}{4}\right]P_r(x), \tag{6·1}$$

उपपत्ति : माना कि

$$f(x)=(1+x)^{\mu/2-1}\,\mathcal{J}_\nu\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^{1/2}\right]=\sum_{r=0}^{\infty}A_rP_r(x) \tag{6·2}$$

समीकरण (6·2) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(-1, 1)$ में परिसीमित विचरण वाला है।

(6·2) में दोनों ओर से $P_n(x)$ से गुणा करने, -1 से 1 तक x के सापेक्ष समाकलन करने तथा [1, p. 337, (32)] एवं [1, p. 279, (27) & (28)], को व्यवहृत करने पर (6·3) की प्रप्ति होगी।

$$A_n=\frac{(2n+1)\,2^{\mu/2-\nu-1}[\Gamma\frac{1}{2}(\mu+\nu)]^2}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\frac{1}{2}[(\mu+\nu)+n+1]\,\Gamma\frac{1}{2}[\nu+1)-n]}$$

$$\times\,{}_2F_3\left[\begin{matrix}(\mu+\nu/2),\ (\mu+\nu/2)\\ \nu+1,\ \frac{1}{2}(\mu+\nu)+n+1,\ \frac{1}{2}(\mu+\nu)-n\end{matrix};-\tfrac{1}{4}\right]. \tag{6·3}$$

(6·2) तथा (6·3) की सहायता से फल (6·1) प्राप्त होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० एस० एम० दास गुप्ता का आभारी है जिन्होंने सुविधायें प्रदान कीं ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms. **भाग** 2, **मैकग्राहिल**, **न्यूयार्क**, 1954.

2. ल्यूक, वाई० एल० । Integrals of Bessel functions. **मैकग्राहिल**, **न्यूयार्क**, 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 2, April 1969, Pages 83-91

अभिसरण प्रमेय तथा सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त के उपगामी गुण

त्रिलोकीनाथ वर्मा
के० के० डिग्री कालेज, इटावा

[प्राप्त-नवम्बर 7, 1967]

सारांश

यदि हम
$$L(S)=\int_0^\infty e^{-st}\psi(t)\,dt$$
लें जिसमें
$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)\,dt$$
तो
$$L(S)=\int_0^\infty \frac{\phi(t)}{s+t}\,dt \qquad (1)$$

जहाँ (1) को स्टाइल्जे परिवर्त के नाम से अभिहित किया जाता है। $\phi(t)\,dt$ को $d\alpha(t)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर (1) का रूप
$$L(S)=\int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{s+t} \qquad (1{\cdot}1)$$
हो जावेगा। प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य एक अभिसरण प्रमेय प्राप्त करना तथा (1·1) के उपगामी गुणों का अध्ययन करना है।

Abstract

Convergence theorems and asymptotic properties of a generalised Stieltjes transform. *By* Triloki Nath Verma, K. K. Degree College, Etawah.

If we take
$$L(S)=\int_0^\infty e^{-st}\,\psi(t)\,dt$$
where
$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)\,dt$$
then
$$L(S)=\int_0^\infty \frac{\phi(t)}{s+t}\,dt \qquad (1)$$

(1) is referred to as Stieltjes transform on replacing $\phi(t)\ dt$ by $d\alpha(t)$, we get (1) in the form

$$L(S)=\int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{s+t} \tag{1·1}$$

The object of this note is to give a convergence theorem and study asymptotic properties of (1·1),

1. यदि हम लैपलास परिवर्त के सार्वीकरण को निम्नांकित रूप में लिखें

$$f(S)=\int_0^\infty e^{-a\,st}\,W_{k,m}(bt)\,(st)^l\,\psi(t)\ dt$$

यदि हम $\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tz}\,\psi(z)\ dz$ के रूप में पारिभाषित करें तो

$$f(S)=\frac{1}{S}\frac{\Gamma(\rho\pm m+\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho-m+\frac{3}{2})}\int_0^\infty {}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho+m+\frac{3}{2},\ \rho-m+\frac{3}{2}\\ \rho+k-2;\ \frac{1}{2}-a-t/s\end{matrix}\right]\phi(t)\ dt. \tag{1.2}$$

यदि हम $\rho=m-\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$, $\rho+m+\frac{3}{2}=\rho$ तथा $k-m=\frac{1}{2}$ रखें तो हाइपरज्यामितीय फलन द्विपदी व्यंजक के रूप में परिणत हो जाता है और हमें स्टाइल्जे परिवर्त का सार्वीकृत रूप प्राप्त होता है जो

$$\xi(S)=\int_0^\infty \frac{\phi(t)}{(S+t)\,\rho}\ dt=\frac{f(S)}{\Gamma(\rho)S^{\rho-1}}$$

यदि हम

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho+m+\frac{3}{2},\ \rho-m+\frac{3}{2}\\ \rho-k+2;\ \frac{1}{2}-a-t/s\end{matrix}\right] \text{ तथा } \frac{\Gamma_x(\rho\pm m+\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho-k+2)} \text{ को क्रमशः}$$

$F(t, S, a)$ तथा A द्वारा व्यक्त करें तो $f(S)$ को हम

$$f(S)=AS^{-1}\int_0^\infty F(t,\ S,\ a)\ d\alpha(t) \tag{1.3}$$

के रूप में अंकित कर सकते हैं। माना कि R के प्रत्येक धनात्मक मान के लिये $0\leqslant t\leqslant R$ अन्तराल में $\alpha(t)$ सीमित विचरण वाला है। अब हम इस अनुपयुक्त समाकल

$$\lim_{R\to\infty} AS^{-1}\int_0^R F(t\ \ S,\ a)\ d\alpha(t)$$

को किसी भी संकीर्ण $S=\sigma+i\rho$ के लिये परिभाषित करेंगे। यदि यह सीमा संकीर्ण चर S के दिये हुये मान के लिये विद्यमान हो तो हम यह कहेंगे कि (1.3) $S=S_0$ के लिये अभिसारी है।

पुनः यदि $\alpha(t)$ ϵ के धनात्मक मान के लिये तथा किसी $R>0$ के लिये $\epsilon\leqslant t\leqslant R$ अन्तराल में सीमित विचरण वाला हो तो हमें

$$AS^{-1}\int_0^{\infty} F(t, S, a)\ d\alpha(t) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ B\to\infty}} AS^{-1}\int_{\epsilon}^{R} F(t, S, a)\ d\alpha(t)$$

परिणामों से (1.2) के लिये ज्ञात परिणाम प्राप्त होते हैं, यदि $k+m=\frac{1}{2}$, $\rho+m+\frac{3}{2}=\rho$, k.

2. **अभिसरण प्रमेय :** (*a*) यदि समाकल (1·2) $S=S_0$ ऋणात्मक वास्तविक अक्ष में न हो, $\rho=0, \sigma<0$ तथा $a\to\frac{1}{2}-0$ के लिये अभिसारी हो तो यह प्रत्येक ऐसे विन्दु के लिये अभिसारी होगा यदि

$$R(2m+1)=R(\rho+m+\tfrac{3}{2})>0,\ \rho-k+2\neq 0, -1, -2\ldots .$$

उपपत्ति : माना कि

$$\beta(t)=A\,S_0^{-1}\int_0^{t} F(t, S, a)\ d\alpha(t).\ (0\leqslant t<\infty)$$

तो S के ऋणात्मक वास्तविक अक्ष पर न होने तथा किसी भी धनात्मक R के लिये

$$\lim_{a\to 1/2-0} AS^{-1}\int_0^{R} E(t, a, S)\ d\alpha(t)\to A\,S^{-1}\int_0^{R} F(S, a, t)\ d\alpha(t)$$

$$=S_0S^{-1}\beta(R)\left[\frac{F(R,\ S)}{F(R,\ S_0)}\right]-S_0S^{-1}\int_0^{R}\frac{d}{dt}\left[\frac{F(t,\ S)}{F(t,\ S_0)}\right]\beta(t)\ dt$$

(i) यदि $\rho+m+\frac{1}{2}$ पूर्णसंख्या अथवा शून्य न हो तो

$$\lim_{a\to 1/2-0} F(t, S\ a)=F(t, S)\sim\frac{\Gamma(\rho-k+2)\,\Gamma(\rho+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(-m-k+\frac{1}{2})}\ S^{2m+1}\,t^{-2m-1}$$

$$+\frac{m-k+\frac{1}{2}}{2m}\,S\,t^{-1}\ \text{जब}\ \to\infty$$

(ii) यही नहीं, यदि $2m$ शून्य हो अथवा धनात्मक पूर्णांक हो तथा $m-k+\frac{1}{2}\neq 0$ या धनात्मक पूर्णांक हो तो

$$AF(t,S, a)\to AF(t,\ S)=[\Gamma(-m-k+\tfrac{1}{2})]^{-1}\,S^{2m+1}\,t^{-2m-1}$$

$$\times\left[\log\frac{t}{S}+h_0\right]+\frac{\Gamma(l+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})}\ S\,t^{-1}\ \text{जब}\ t\to\infty$$

यदि $\rho+m+\frac{1}{2}=0$ तो अन्तिम पद का लोप हो जाता है।

(iii) यदि $\rho+m+\frac{1}{2}=0$ या धनात्मक पूर्णांक तथा $-m-k+\frac{1}{2}$ शून्य हो या धनात्मक पूर्णांक हौ तो

$$AF(t, S, a)\to AF(t, S)\sim(-1)^{m-k+1/2}S^{m-k+3/2}\,t^{k-m-3/2}$$

$$+[\Gamma(-m-k+\tfrac{1}{2})]^{-1}S^{2m+1}t^{-2m-1}\left[\log\left(\frac{t}{S}\right)+h_0\right]+\frac{(2m-1)!}{(m-k-\frac{1}{2})!}\,S\,t^{-1}$$

$$\text{जब}\ t\to\infty;\ a=\tfrac{1}{2}-0.$$

यदि $\rho+m+\frac{1}{2}=0$ या $-m-k+\frac{1}{2}=0$ तो द्वितीय पद का लोप हो जाता है।

इसके आगे भी

(iv) $F(t, S, a) \sim F(t, S) = \left(1+\frac{t}{S}\right)^{-m-k+1/2} {}_2F_1\left[\begin{matrix} -m-k+\frac{1}{2}, m-k+\frac{1}{2} \\ m-k+\frac{3}{2}; -t/S \end{matrix}\right]$

अब (i), (ii), (iii) तथा (iv) से हमें

$$\frac{F(R, S, a)}{F(R, S_0, a)} \to SS_0^{-1} \text{ जब } a \to \tfrac{1}{2}-0, R \to \infty$$

प्राप्त होगा यदि

(1) $\rho+m+\frac{1}{2}=0$ या धनात्मक पूर्णांक तथा $R(m)<0$

(2) $k+m=\frac{1}{2}$ या

(3) $\rho+m+\frac{1}{2}\neq 0$ या धनात्मक पूर्णांक, $k\pm m\neq\frac{1}{2}$ तथा $R(m)>0$;

और
$$\frac{F(R, S, a)}{F(R, S_0, a)} \to \left(\frac{S}{S_0}\right)^{2m+1} \text{ जब } a=\tfrac{1}{2}-0, \; R \to \infty$$
यदि

(1) $k-m=\frac{1}{2}$ या

(2) $\rho+m+\frac{1}{2}\neq 0$ या धनात्मक पूर्णांक, $R(m)<0$

इस प्रकार

$$S_0 S^{-1} \beta(R) \frac{F(R, S, a)}{F(R, S_0, a)} \to \text{ सान्त मान जब } a \to \tfrac{1}{2}-0, R \to \infty,$$

अतः यदि हम समाकल

$$u=\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\right] \beta(t)\, dt$$

पर विचार करें तो यह दिखाया जा सकता है कि यह पूर्णतः अभिसारी है यदि

$$|u| = \left| \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\right] \beta(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant M \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\right] dt$$

$$\leqslant M \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\right] dt$$

$$=M\left|\left[\frac{F(t, S)}{F(t, S_0)}\right]-1\right| \text{ जब } \underset{a\to 1/2-0}{t\to\infty}$$

अब

$$\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\to\frac{F(t, S)}{F(t, S_0)}\to\left(\frac{S}{S_0}\right)^1 \text{ या } \left(\frac{S}{S_0}\right)^{2m+1} \text{ जब } t\to\infty$$

तथा $a\to\frac{1}{2}-0$, जो सान्त मात्रा है। अतः प्रमेय सिद्ध हुई।

3. **प्रमेय** : यदि (1·2) अभिसारी हो तो यदि

$$R(\rho+m+\tfrac{3}{2})>0,\ m-k+\tfrac{3}{2}\neq 0,\ -1,\ -2\ldots,\ \rho-m+\tfrac{3}{2}=1$$

$$\alpha(t)=0(t) \text{ जब } t\to\infty$$

यदि (1) $\rho+m+\frac{1}{2}$ धनात्मक पूर्णांक हो या

(2) $2m\neq 0$ या धनात्मक पूर्णांक, $k\pm m\neq\frac{1}{2}$ तथा $R(m)>0$

या (3) $k+m=\frac{1}{2}$

पुनः यह $\alpha(t)=0(t^{2m+1})$ $(t\to\infty)$ कोटि की है यदि

(i) $k-m=\frac{1}{2}$ या

(ii) $2m\neq 0$ या धनात्मक पूर्णांक $R(m)<0$ तथा यह $\alpha(t)=0\left(\frac{t}{\log t}\right)$ $t\to\infty$ कोट की है

यदि $\rho+m+\frac{1}{2}=0$ तथा $-k+\frac{1}{2}\neq 0$

उपपत्ति : माना कि (1.2) ऋणात्मक वास्तविक अक्ष पर $S=S_0$ पर अभिसारी है। साथ ही

$$\beta(t)=A\,S_0^{-1}\int_{S0}^{t} F(t, S_0, a)\,d\alpha(t)$$

तो $$\alpha(t)-\alpha(S_0)=\int_{S0}^{t} d\alpha(\mu)=S_0A^{-1}\Big[[\beta(u)F(u, S_0, a)^{-1}\Big]_0^t$$

$$-S_0A^{-1}\int_{S0}^{t}\beta(u)\frac{d}{du}\Big[F(u, S_0)\Big]^{-1}du$$

या $\because a\to\frac{1}{2}-0$

$$A\,S_0^{-1}[\alpha(t)-\alpha(S_0)]F(t, S_0)=\beta(t)-F(t, S_0)\int_{S0}^{t}\beta(u)\frac{d}{du}\Big[F(u, S_0)^{-1}\Big]du$$

तो समाकल फलन के मध्यमान प्रमेय को प्रयुक्त करते हुये हमें

$$A\,S_0^{-1}[\alpha(t)-\alpha(S_0)]F(t, S_0, a)\to\beta(\infty)-\beta(\infty) \text{ जब } \underset{a\to 1/2-0}{t\to\infty}$$

जब $F(t, S_0, a)\to F(t, S_0)>0$ जब $t\to\infty$ तथा $a\to\frac{1}{2}-0$ प्राप्त होगा।

यह प्रदर्शित करना सरल है कि $\frac{\alpha(t)}{t}$ या $\frac{\alpha(t)}{t^{2m+1}}$ या $\frac{\alpha(t)}{t\log t}$ की सीमा उपर्युक्त दिए हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत शून्य है।

4. परिवर्त के उपगामी गुण

प्रमेय 1 : यदि

$$f(S)=\frac{1}{S}\,\frac{\Gamma(\rho+m+\frac{3}{2})\Gamma(\rho-m+\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho-k+2)}\int_0^\infty {}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho\pm m+\frac{3}{2}\\ \rho-k+2\end{matrix},\,-1-\tfrac{1}{2}+\frac{t}{S}\right]\alpha(t)\,dt$$

$\alpha(0)=0$ तथा

(i) $R(\rho+m+\frac{3}{2})>0,\ (\rho-m+\frac{3}{2})=1$

(ii) $m-k+\frac{3}{2}\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots$ तथा

(iii) (a) $2m$ शून्य या धनात्मक पूर्णांक हो या

(b) $2m\neq 0$ धनात्मक पूर्णांक हो, $k\pm m\neq\frac{1}{2}$ तथा $R(m),\ \geqslant 0$

या (c) $k+m=\frac{1}{2}$ के लिये अभिसारी हो तो

$$f(S)\sim A\,\alpha(O+)S^{-1},\ (S\to O+)$$

$$f(S)\sim O(1)\ \text{जब}\ S\to\infty$$

उपपत्ति : माना कि

$$\beta(t)=A S_0^{-1}\int_{S0}^{t} d\alpha(t)F(t,\,S_0,\,a)$$

तो
$$\lim_{a\to 1/2-0} f(S)=S_0S^{-1}\left[\frac{F(t,\,S)}{F(t,\,S_0)}-\beta(t)\right]_0^\infty-S_0S^{-1}\int_0^\infty\frac{d}{dt}\left[\frac{F(t,\,S)}{F(t,\,S_0)}\right]\beta(t)\,dt$$

अतः
$$\lim_{S\to 0+0} Sf(S)=\operatorname*{Lim}_{S\to 0+0}(-1)S_0\int_0^\infty\frac{d}{dt}\left[\frac{F(t,\,S)}{F(t,\,S_0)}\right]\beta(t)\,dt$$

अब
$$\underset{a\to 1/2}{S_0}\int_0^\infty\frac{d}{dt}\left[\frac{F(t,\,S,\,a)}{F(t,\,S_0\,a)}\right]dt=S-S_0$$

और भी
$$\beta(t)=A\,S_0^{-1}\,F(t_uS_0)\alpha(t)\qquad 0<t_1<t$$

अतः $$\beta(O+)=AS_0^{-1}\alpha(O+)$$

अतः $$\rho=\left|\int_0 \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S)}{F(t, S_0)}\right] \beta(t)\, dt-\beta(O+)(SS_0^{-1}-1)\right|$$

अतः $$\rho=\left|\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\right] \beta(t)\, dt-\beta(O+)(SS_0^{-1}-1)\right|$$

$$=\left|\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S)}{F(t, S_0)}\right] \beta(t)-\beta(O+)\, dt\right| \text{ जब } a\to\tfrac{1}{2}-0.$$

$t>0$ दिया होने पर हम एक ऐसी संख्या $\delta>0$ प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि $|\beta(t)-\beta(0)|<t$, जब भी $0\leqslant t\leqslant\delta$. आगे यदि M समस्त धनात्मक t के लिये $|\beta(t)-\beta(0)|$ ऊपरी सीमा हो तो

$$|\rho|\leqslant\left|\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\right](|\beta(t)|-|\beta(0)|)\, dt\right|$$

$$+\left|\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S, a)}{F(t, S_0, a)}\right]\left[|\beta(t)|-|\beta(0)|\right]\right|$$

$$\leqslant\epsilon\left|\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S_0)}{F(t, S_0)}\right] dt\right|+M\left|\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left\{\frac{F(t, S)}{F(t, S_0)}\right\} dt\right|$$

$$\leqslant\epsilon|S_0S^{-1}-1|+M\left|SS_0^{-1}-\left[\frac{F(\delta, S)}{F(\delta, S_0)}\right]\right|$$

अतः $\rho=0$, क्योंकि ϵ काल्पनिक है। अतः $S\to 0$

$$\lim_{\substack{S\to 0\\ a\to 1/2-0}} Sf(S)=\lim_{S\to 0+}(-S+S_0)\beta(O+)=A\alpha(O+)$$

आगे भी विचार करने पर

$$\rho_1=\left|S^{-1}\int_0^\infty \frac{d}{d}\left[\frac{F(t, S\ a)}{F(t, S_0, a)}\right]\beta(t)\, dt-\beta(\infty)(1-S_0S^{-1})\right|$$

$$=\left|S^{-1}\int_0^\infty \frac{F(t, S)}{F(t,S_0)}[\beta(t)-\beta(\infty)]\, dt\right|$$

$\epsilon^1=0$ दिया होने पर हम ऐसी संख्या R जो चाहे जितनी भी बड़ी क्यों न हो कि

$$|\beta(t)-\beta(\infty)|<t$$

और, यदि M_1 समस्त धनात्मक t के लिये $|\beta(t)-\beta(\infty)|$ ऊपरी सीमा हो तो

$$\rho_1\leqslant\left|S^{-1}\epsilon^1\int_R^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S)}{F((t, S_0)}\right] dt\right|+M_1\left|S^{-1}\int_0^R \frac{d}{dt}\left[\frac{F(t, S)}{F(t, S_0)}\right]' dt\right|$$

$$\leqslant \epsilon^1 |1-S_0S^{-1}|+M_1 \left| S^{-1}\left[\left\{\frac{F(R,\ S)}{F(R,\ S_0)}\right\}-1\right]\right|$$

$\rho_1 \underset{\substack{S\to 0\\ a\to 1/2-0}}{\to} 0$ क्योंकि ϵ^1 काल्पनिक है

$$\lim_{S\to\infty} f(S)=\lim_{S\to\infty}[f(S_0)-\beta(\infty)(1-S_0S^{-1})]=0$$

प्रमेय 2 : यदि

$$f(S)=\frac{1}{S}\frac{\Gamma_x(\rho\pm m+\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho-k+2)}\int_0^\infty {}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho\pm m+\frac{3}{2}\\ \rho-k+2\end{matrix};\ \left(\tfrac{1}{2}-a+\frac{t}{S}\right)\right]dt$$

$\alpha(O)=0$ तथा

(i) $R(\rho+m+\frac{3}{2})=R(2m+1)>0$

(ii) $m-k+\frac{3}{2}\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ तथा

3 (*a*) $2m$ धनात्मक पूर्णांक है

(*b*) $2\neq m=0$ या धनात्मक पूर्णांक $k\pm m=\frac{1}{2}$, $R(m)>0$ अथवा

(*c*) $k+m=\frac{1}{2}$

के लिये अभिसारी हो तो

$$\lim_{a\to 1/2-0} f^n(S)\sim(-1)^n(n)!\,A\,\alpha(O+)S^{-n-1} \quad (S\to 0;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$f^n(S)=0(S^{-n}) \quad (S\to 0;\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

उपपत्ति : खंडशः समाकलन करने पर

$$\lim_{a\to 1/2-0} f(S)=\frac{\Gamma(\rho+m+\frac{5}{2})\Gamma(\rho-m+\frac{3}{2})}{\Gamma(m-k+\frac{5}{2})}\frac{1}{S^2}\int_0^\infty {}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho+m\frac{5}{2},\ \rho-m+\frac{3}{2}\\ m-k+\frac{5}{2};\ -t/S\end{matrix}\right]\alpha(t)\ dt$$

साथ ही

$$\frac{d}{dS}\left[\frac{1}{S^2}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho+m+\frac{5}{2},\ \rho-m+\frac{5}{2}\\ \rho-k+2\end{matrix};\ -\frac{t}{S}\right]=(-1)2.\ S^{-3}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho+m+\frac{5}{2},\ \rho-m+\frac{7}{2}\\ m-k+\frac{5}{2}\end{matrix};\ -t/S\right]\right.$$

तथा

$$\lim_{a\to 1/2-0} f^n(S)=(-1)^n\frac{\Gamma(\rho+m+\frac{5}{2})}{\Gamma(m-k+\frac{5}{2})}\ (n+1)!\times S^{-n-2}\int_0^\infty {}_2F_1\left[\begin{matrix}\rho+m+\frac{3}{2},\ n+2\\ m-k+\frac{5}{2}\end{matrix};\ -t/S\right]\alpha(t)\ dt$$

पिछली प्रमेय से उपर्युक्त समाकलन अभिसारी होगा ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा० ब्रजमोहन का आभारी हूँ जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी ए० तथा अन्य । Higher Transcendental functions. **भाग** I, 1953.

2. वर्मा, आर० एस० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1951.

3. विडर, डी० वी० । The Laplace transform. **प्रिंसटन**, 1946

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No 2, April 1969, Pages 93-97

गोलाकार पृष्ठ पर विभव तथा माइजर का G-फलन

एस० डी० बाजपेयी
प्रयुक्त गणित विभाग, श्री जी० एस० टेक्नालाजिकल इंस्टीच्यूट, इंदौर

[प्राप्त—अगस्त 11, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में किसी गोलाकार पृष्ठ के परिवृत्त विभव सम्बन्धी प्रश्न को हल करने के लिये माइजर के G-फलन का व्यवहार किया गया है और यह दिखाया गया है कि किस प्रकार माइजर के G-फलन का उपयोग प्रयुक्त गणित के प्रश्नों के हल के लिये उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

Abstract

The potential about a spherical surface and Meijer's G-function. *By* S. D. Bajpai, Department of Applied Mathematics, Shri G. S. Technological Institute, Indore.

In this paper we have employed Meijer's G-function to solve a problem of the potential about a spherical surface and shown how Meijer's G-function may be found useful in solving certain problems of applied mathematics.

1. विभव सिद्धान्त (potential theory) में माइजर के G-फलन के उपयोग के लिये उदाहरण स्वरूप हम गोलाकार पृष्ठ के परिवृत विभव ज्ञात करने के प्रश्न पर विचार करेंगे।

माना कि गोलाकार पृष्ठ पर वैद्युत विभव $V=F(\theta)$, ज्ञात रूप से वितरित है जिसमें r, ϕ, θ गोलाकार निर्देशांक हैं जिनका मूलबिन्दु गोले के केन्द्र में है। यह मानते हुये कि दिक् में समस्त बिन्दुओं पर जो पृष्ठ के अन्दर तथा बाहर हैं, आवेशरहित हैं विभव का निश्चयन करना है। यह स्पष्टतया ϕ से मुक्त होगा अतः इसे लैपलास समीकरण में गोलाकार निर्देशांकों में निम्नांकित दशा की तुष्टि करनी होगी :

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0. \tag{1·1}$$

$V(r, \theta)$ विभव को अपने द्वितीय कोटिक व्युत्पन्नों सहित प्रत्येक क्षेत्र में, जिसमें पृष्ठ का बिन्दु स्थित न हो, शतत होना होगा तथा पृष्ठ से अनन्त दूरी के बिन्दुओं पर लोप होना होगा। अतः सीमा प्रतिबन्ध निम्नांकित प्रकार होंगे :

$$\operatorname*{Limt}_{r\to C} V(r, \theta)=F(\theta) \qquad (0<\theta<\pi), \tag{1·2}$$

जहाँ C गोलाकार पृष्ठ की त्रिज्या है तथा

$$\operatorname*{limt}_{r\to\infty} V(r, \theta)=0. \tag{1·3}$$

संक्षेपण की दृष्टि से $a_1, \ldots, \ldots, a_p$ के लिये a_p, δ धनात्मक पूर्णसंख्या के लिए तथा $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\alpha+1}{\delta}, \ldots, \frac{\alpha+\delta-1}{\delta}$ प्राचलों के समुच्चय के लिये संकेत $\triangle(\delta, \alpha)$ का प्रयोग हुआ है।

प्रस्तुत शोध पत्र में हम

$$F(\theta)=\sin^{2\sigma-2}\theta\, G^{m, n}_{p, q}\left(z \sin^{2\delta}\theta \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right), \tag{1·4}$$

तथा

$$F(\theta)=(1-\cos\theta)^{\sigma} G^{m, n}_{p, q}\left(z(1-\cos\theta)^{\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right) \tag{1·5}$$

पर विचार करेंगे।

उपपत्तियों में निम्नांकित सूत्रों की आवश्यकता पड़ेगी :—

$$\int_0^{\pi} \sin^{2\sigma-1}\theta P_\nu(\cos\theta) G^{m, n}_{p, q}\left(z\sin^{2\delta}\theta \,\middle|\, \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right) d\theta \tag{1·6}$$

$$=\frac{\pi\,\delta^{-1}}{\Gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} G^{m, n+2\delta}_{p+2\delta, q+2\delta}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \triangle(\delta, 1-\sigma), \triangle(\delta, 1-\sigma)\, a_p \\ b_q, \triangle(\delta, -\sigma-\frac{1}{2}\nu), \triangle(\delta, 1-\sigma+\frac{1}{2}\nu) \end{matrix}\right),$$

जहाँ $2(m+n)>p+q$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re\,(\sigma+\delta b_j)>0$, $j=1, 2, \ldots, m$, जो [1, (2.1)] से निकलता है।

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\,(1-\cos\theta)^{\sigma} P_\nu(\cos\theta) G^{m, n}_{p, q}\left(z(1-\cos\theta)^{\delta} \,\middle|\, \begin{matrix} ap \\ pq \end{matrix}\right) d\theta \tag{1·7}$$

$$=\frac{2^{\sigma+1}}{\delta} G^{m+\delta, n+\delta}_{p+2\delta, q+2\delta}\left(2^{\delta} z \,\middle|\, \begin{matrix} \triangle(\delta, -\sigma), a_p, \triangle(\delta, -\sigma) \\ \triangle(\delta, \nu-\sigma), b_q, \triangle(\delta, -1-\sigma-\nu) \end{matrix}\right),$$

जहाँ $2(m+n)>p+q$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re\,(\sigma+\delta b_j)>0$, $j=1, 2, \ldots, m$, जो [4, 198, (3.2)] से प्राप्त होगा।

$$\int_0^\pi \sin\theta(P_n\cos\theta)^2\, d\theta=\frac{2}{2n+1}, \tag{1·8}$$

जो [3, p. 277, (13)] से मिलता है।

$$\int_0^\pi \sin\theta P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\, d\theta=0, \text{ यदि } m\neq n, \tag{1·9}$$

जो [3, p. 277, (14)] से निकलता है।

2. गोले के अन्दर बिन्दुओं से सम्बन्धित प्रश्न का हल

जिन हलों को सम्पन्न करना है वे हैं :

$$V(r,\theta)=\frac{\pi}{\delta}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(2N+1)}{2}\left(\frac{r}{C}\right)^N\frac{P_N(\cos\theta)}{\Gamma\left(\frac{2+N}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-N}{2}\right)}$$

$$\times G^{m,\, n+2\delta}_{p+2\delta,\, q+2\delta}\left(z\,\Bigg|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,1-\sigma),\ \triangle(\delta,1-\sigma),\ a_p\\ b_q,\ \triangle(\delta,\sigma-\frac{1}{2}N),\ \triangle(\delta,1-\sigma+\frac{1}{2}N)\end{matrix}\right), \tag{2·1}$$

$$V(r,\theta)=\frac{2^{\sigma+1}}{\delta}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(2N+1)}{2}\left(\frac{r}{C}\right)^N P_N(\cos\theta)$$

$$\times G^{m+\delta,\, n+\delta}_{p+2\delta,\, q+2\delta}\left(2^\delta z\,\Bigg|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,-\sigma),\ a_p,\ \triangle(\delta,-\sigma)\\ \triangle(\delta,-\sigma),\ b_q\triangle(\delta,1-\sigma-N)\end{matrix}\right), \tag{2·2}$$

जहाँ $2(m+n)>p+q$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $r\leqslant C$, $Re\,(\sigma+\delta b_j)>0, j=1,2,\ldots\ldots,m$

उपपत्ति : प्रश्न का जैसा हल [2, p. 195] में दिया है

$$V(r,\theta)=\sum_{N=0}^{\infty}B_N r^N P_N(\cos\theta) \qquad (r<c). \tag{2·3}$$

यदि $r=C$, तो (1·4), के आधार पर

$$\sin^{2\sigma-2}\theta\, G^{m,\,n}_{p,\,q}\left(z\sin^{2\delta}\theta\,\Bigg|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)=\sum_{N=0}^{\infty}B_N C^N P_N(\cos\theta) \quad (0<\theta<\pi). \tag{2·4}$$

(2·4) में दोनों ओर $\sin\theta P_\nu(\cos\theta)$ से गुणा करने पर तथा 0 से π तक θ के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\pi \sin^{2\sigma-1}\theta P_\nu(\cos\theta)G^{m,\,n}_{p,\,q}\left(z\sin^{2\delta}\theta\,\Bigg|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)d\theta$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}B_N C^N\int_0^\pi \sin\theta P_\nu(\cos\theta)P_N(\cos\theta)\, d\theta. \tag{2·5}$$

(1·6), (1·8) तथा (1·9) को प्रयुक्त करने पर

$$B_\nu=\frac{\pi(2\nu+1)}{2\delta C^\nu\Gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}G^{m,\,m+2\delta}_{p+2\delta,\,q+2\delta}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,1-\sigma),\ \triangle(\delta,1-\sigma),\ a_p\\ b_q,\ \triangle(\delta,-\sigma-\nu/2),\ \triangle(\delta,1-\sigma+\nu/2)\end{matrix}\right),\tag{2.6}$$

जहाँ $2(m+n)>p+q$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re\,(\sigma+\delta b_j)>0, j=1, 2, \ldots, m.$

अब (2·3) तथा (2·6) की सहायता से (2.1) हल तुरन्त निकल आता है।

इसी प्रकार (2·2) हल भी (1·6) के स्थान पर (1·7) का उपयोग करने पर प्राप्त किया जा सकता है।

3. गोले से बाहर बिन्दुओं वाले प्रश्न के हल

जिन हलों की प्राप्ति करनी है वे हैं ;

$$V(r,\theta)=\frac{\pi}{\delta}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(2N+1)}{2}\left(\frac{C}{r}\right)^{N+1}\frac{P_N(\cos\theta)}{\Gamma\left(\frac{2+N}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-N}{2}\right)}$$

$$\times G^{m,\,n+2\delta}_{p+2\delta,\,q+2\delta}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,1-\sigma),\ \triangle(\delta,1-\sigma),\ a_p\\ b_q,\ \triangle(\delta,-\sigma-\frac{1}{2}N),\ \triangle(\delta,1-\sigma+\frac{1}{2}N)\end{matrix}\right),\tag{3·1}$$

$$V(r,\theta)=\frac{2^{\sigma+1}}{\delta}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(2N+1)}{2}\left(\frac{C}{r}\right)^{N+1}P_N(\cos\theta)$$

$$\times G^{m+\delta,\,n+\delta}_{p+2\delta,\,q+2\delta}\left(2^\delta z\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(\delta,-\sigma),\ a_p,\ \triangle(\delta,-\sigma)\\ \triangle(\delta,N-\sigma),\ b_q,\ \triangle(\delta,-1-\sigma-N)\end{matrix}\right),\tag{3·2}$$

जहाँ $2(m+n)>p+q$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $r\geqslant C$, $Re\,(\sigma+\delta b_j)>0, j=1, 2, \ldots, m.$

उपपत्ति : इस प्रश्न का हल [2, p. 195, (6)] में दिये गये हल के समान है :

$$V(r,\theta)=\sum_{N=0}^{\infty}A_N\frac{C^{N+1}}{r^{N+1}}P_N(\cos\theta)\qquad(r>C).\tag{3·3}$$

यदि $r=C$, तो (1.4) के बल पर

$$\sin^{2\sigma-2}\theta\,G^{m,\,n}_{p,\,q}\left(z\sin^{2\delta}\theta\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)=\sum_{N=0}^{\infty}A_NP_N(\cos\theta)\qquad(0<\theta<\pi).\tag{3·4}$$

(3.4) में दोनों ओर $\sin\theta P_\nu(\cos\theta)$ द्वारा गुणा करने पर तथा 0 से π तक θ के प्रति समाकलित करने पर और तब (1·6), (1·8) तथा (1·9) का उपयोग करने पर

$$A_\nu = \frac{\pi(2\nu+1)}{2\delta C^\nu \Gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} G^{m,\ n+2\delta}_{p+2\delta,\ q+2\delta}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \triangle(\delta,\ 1-\sigma),\ \triangle(\delta,\ 1-\sigma),\ a_p \\ b_q,\ \triangle(\delta,\ -\sigma-\tfrac{1}{2}\nu),\ \triangle(\delta,\ 1-\sigma+\tfrac{1}{2}\nu) \end{matrix}\right), \tag{3·5}$$

जहाँ $2(m+n)>p+q$, $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $Re\,(\sigma+\delta b_j)>0$, $j=1, 2, \ldots, m$.

(3·1) हल (3·3) तथा (3·5) से प्राप्त होगा।

इसी प्रकार (3·2) हल (1·7) के उपयोग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा G-फलन को बेसेल फलनों, लेगेण्ड्र फलनों तथा अन्य उच्चतर अभीजीय फलनों [3 p. 434-444] में परिवर्तित किया जा सकता है। अतः (1·4) तथा (1·5) में दिये गये $F(\theta)$ सामान्य आचरण वाले हैं अतः वे अनेक रोचक दशाओं को समाविष्ट कर सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वी० एम० भिसे का आभारी है, जिन्होंने इस शोध पत्र के लेखन में सहायता पहुँचाई। लेखक प्रिंसिपल डा० एस० एम० दासगुप्ता का भी आभारी है जिनके द्वारा प्रदत्त सुविधाओं का लेखक ने उपयोग किया।

निर्देश

1. बाजपेयी, एस० डी०। **प्रोसी० नेश० इंस्टी० सांइस (इंडिया) में प्रकाशनार्थ स्वीकृत।**
2. चर्चिल, आर० वी०। Fourier Series and Boundary value Problems. **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1942.
3. एर्डेल्यी, ए०। Tables of Integral Transforms, **भाग** 2, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.
4. सक्सेना, आर० के०। **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1964, **28** (3-4), 197-202.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 12 | जुलाई 1969 | संख्या 3

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 3, July 1969, Pages 99-109

दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के गुणनफल के व्युत्पन्न

मणिलाल शाह

गणित विभाग, पी० एम० बी० जी० कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—नवम्बर 18, 1967]

सारांश

दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के गुणनफल के व्युत्पन्नों को प्राप्त किया गया है जिसमें बहुपदी की परिभाषा निम्नांकित प्रकार से की गई है :

$$F_n(x)=x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right].$$

कई विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

On the derivatives of the product of two generalised hypergeometric polynomials. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P.M.B.G. College, Indore.

Derivatives of the product of two generalised hypergeometric polynomials have been obtained by defining the polynomial as

$$F_n(x)=x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right].$$

Many special cases have given

1. **भूमिका** : लाम्बिक बहुपदियों के व्युत्पन्नों का अध्ययन काल[1,2] द्वारा तथा अभी हालही में चटर्जी[3] और खंडेकर[4] द्वारा किया गया है। प्रस्तुत शोध पत्र में दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के गुणफल के व्युत्पन्न प्राप्त किये गये हैं। प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा कई ज्ञात और अज्ञात फल प्राप्त किये गये हैं।

संक्षेपण एवं लेखन में सुविधा की दृष्टि से हम निम्नांकित संकुचित संकेतन का व्यवहार करेंगे।

$$ {}_pF_q(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_p)_k\, x^k}{(b_q)_k\, k!} $$

फलतः $(a_p)_k$ की $\prod_{j=1}^{p}(a_j)_k$ के रूप में व्याख्या की जावेगी और इसी प्रकार $(b_q)_k$ की।

हमने सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी[5] को

$$ F_n(x) = x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta}F_q \left[\begin{matrix} \triangle(\delta, -n),\ a_p \\ b_q \end{matrix} ;\ \mu x^c \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r (a_p)_r\, \mu^r\, x^{(\delta-1)n+cr}}{(b_q)_q\, r!} \tag{1·1} $$

के द्वारा पारिभाषित किया है जिसमें

$\triangle(\delta, -n)$ द्वारा δ-प्राचल की अभिव्यक्ति हुई है, $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}, \ldots, \frac{-n+(\delta-1)}{\delta}$ तथा δ, n धन पूर्णांक हैं।

2. सर्वप्रथम हम एकाकी सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के व्युत्पन्नों को प्राप्त करेंगे क्योंकि आगे इनकी आवश्यकता पड़ेगी। (1·1) के दोनों ओर को x के प्रति k बार अवकलित करने पर

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left\{ x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta}F_q \left[\begin{matrix} \triangle(\delta, -n),\ a_p \\ b_q \end{matrix} ;\ \mu x^c \right] \right\} $$

$$ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r (a_p)_r\, \mu^r\, \Gamma\{(\delta-1)n+cr+1\}}{(b_q)_r\, \Gamma\{(\delta-1)n+cr-k+1\}\, r!}\, x^{(\delta-1)n+cr-k} \tag{2·1} $$

$$ 0 < k \leqslant n $$

प्राप्त होगा।

विभिन्न ज्ञात बहुपदियों के हाइपरज्यामितीय रूपों पर ध्यान देने से हमें (2·1) की तीन विशिष्ट दशाएँ प्राप्त होंगी :

(i) $\delta \geqslant 2$ तथा c के धन पूर्णांक होने पर, $(a)_{nk} = k^{nk} \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a+i-1}{k}\right)_n$ सम्बन्ध को गामा फलनों के लिये प्रयुक्त करने पर

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^k \left\{ x^{(\delta-1)n}\, {}_{p+\delta}F_q \left[\begin{matrix} \triangle(\delta, -n),\ a_p \\ b_q \end{matrix} ;\ \mu x^c \right] \right\} $$

$$ = \frac{(\delta-1)n!}{\{(\delta-1)n-k\}!}\, x^{(\delta-1)n-k}\, {}_{p+\delta+c}F_{q+c} \left[\begin{matrix} \triangle(\delta, -n),\ \triangle(c, (\delta-1)n+1),\ a_p \\ \triangle(c, (\delta-1)n-k+1),\ b_q \end{matrix} ;\ \mu x^c \right] \tag{2·2} $$

प्राप्त होगा।

(ii) यदि $\delta=c=1$, तथा r को $r+k$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हुये एवं $(a)_{n+k}=(a)_k(a+k)_n$ सम्बन्ध का प्रयोग करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left\{{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, & a_p \\ & b_q\end{matrix}; \mu x\right]\right\}$$

$$=\frac{(-n)_k(a_p)_k\,\mu^k}{(b_q)_k}\,{}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n+k, & a_p+k \\ & b_q+k\end{matrix}; \mu x\right],\quad 0<k\leqslant n.$$

(2·3) की विशिष्ट दशायें अनुभाग 4 में प्राप्त की गई हैं ।

(iii) यदि $c=-c'$ जहाँ c' धन पूर्णांक है, $\delta\geqslant 2$ तथा $\dfrac{\Gamma(1-a-n)}{\Gamma(1-a)}=\dfrac{(-1)^n}{(a)_n}$, $(a)_{nk}=k^{nk}\prod\limits_{i=1}^{k}\left(\dfrac{a+i-1}{k}\right)_n$, सम्बन्धों का उपयोग करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left\{x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), & a_p \\ & b_q\end{matrix}; \mu x^{-c'}\right]\right\}$$

$$=\frac{(\delta-1)n\,!}{\{(\delta-1)n-k\}\,!}\,x^{(\delta-1)n-k}\,{}_{p+\delta+c'}F_{q+c'}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n), \triangle(c', -(\delta-1)n+k), a_p \\ \triangle(c', -(\delta-1)n), \quad b_q\end{matrix}; \mu x^{-c'}\right]. \tag{2·4}$$

(2·4) की विशिष्ट दशायें अनुभाग 4·1 में प्राप्त की गई हैं ।

3. इस अनुभाग में दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के गुणनफल के व्युत्पन्नों की स्थापना की जावेगी ।

हम जानते हैं कि

$$F_n(x)F_m(x)=x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), & a_p \\ & b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]x^{(\gamma-1)m}\,{}_{l+\gamma}F_s\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma, -m), & \rho_l \\ & \sigma_s\end{matrix}; \lambda x^d\right]. \tag{3·1}$$

(3·1) में किसी गुणनफल के k^{th} व्युत्पन्न के लिये लीबनिट्ज के नियम का सम्प्रयोग करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[\left\{x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), & a_p \\ & b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]\right\}\left\{x^{(\gamma-1)m}\,{}_{l+\gamma}F_s\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma, -m), & \rho_l \\ & \sigma_s\end{matrix}; \lambda x^d\right]\right\}\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{k} C_{k,\,r}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-r}\left\{x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), & a_p \\ & b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]\right\}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{d}{dx}\right)^r\left\{x^{(\gamma-1)m}\,{}_{l+\gamma}F_s\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma, -m), & \rho_l \\ & \sigma_s\end{matrix}; \lambda x^d\right]\right\}\right]. \tag{3·2}$$

$$0<k\leqslant n,$$
$$0<k\leqslant m.$$

हम (3·2) की निम्नांकित चार विशिष्ट दशाओं पर विचार करेंगे :

(i) यदि $\delta \geqslant 2$, $\gamma \geqslant 2$, c, d धन पूर्णांक हों तो (2·2) की सहायता से

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[\left\{x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), a_p \\ b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]\right\}\left\{x^{(\gamma-1)m}\ {}_{l+\gamma}F_s\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma, -m), \rho_l \\ \sigma_s\end{matrix}; \lambda x^d\right]\right\}\right]$$

$$= \frac{(\delta-1)n\,!}{\{(\delta-1)n-k\}\,!}\, x^{(\delta-1)n+(\gamma-1)m-k} \sum_{r=0}^{k} C_{k,r} \frac{(-1)^r\{-(\gamma-1)m\}_r}{\{(\delta-1)n-k+1\}_r}$$

$$\times {}_{p+\delta+c}F_{q+c}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), \triangle(c, (\delta-1)n+1), a_p \\ \triangle(c, (\delta-1)n-k+r+1), \quad b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]$$

$$\times {}_{l+\gamma+d}F_{s+d}\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma, -m), \triangle(d, (\gamma-1)m+1), \rho_l \\ \triangle(d, (\gamma-1)m-r+1), \sigma_s\end{matrix}; \lambda x^d\right] \tag{3·3}$$

(ii) यदि $\delta=\gamma=1$, $c=d=1$, तो (2·3) के फल का व्यवहार करते हुये

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[\left\{{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n, a_p \\ b_q\end{matrix}; \mu x\right)\right\}\left\{{}_{l+1}F_s\left(\begin{matrix}-m, \rho_l \\ \sigma_s\end{matrix}; \lambda x\right)\right\}\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{k} C_{k,r} \frac{(-n)_{k-r}(a_p)_{k-r}(-m)_r(\rho)_r \mu^{k-r}\lambda^r}{(b_q)_{k-r}(\sigma s)_r}$$

$$\times {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n+k-r, a_p+k-r \\ b_q+k-r\end{matrix}; \mu x\right] {}_{l+1}F_s\left[\begin{matrix}-m+r, \rho_l+r \\ \sigma_s+r\end{matrix}; \lambda x\right] \tag{3·4}$$

(iii) यदि $c=-c'$, $d=-d'$, जहाँ c', d' धन पूर्णांक हों, $\delta \geqslant 2$, $\gamma \geqslant 2$ तथा (2·4) की सहायता से

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[\left\{x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), a_p \\ b_q\end{matrix}; \mu x^{-c'}\right]\right\}\left\{x^{(\gamma-1)m}\ {}_{l+\gamma}F_s\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma, -m), \rho_l \\ \sigma_s\end{matrix}; \lambda x^{-d'}\right]\right\}\right]$$

$$= \frac{(\delta-1)n\,!}{\{(\delta-1)n-k\,!}\, x^{(\delta-1)n+(\gamma-1)m-k} \sum_{r=0}^{k} C_{k,r} \frac{(-1)^r\{-(\gamma-1)m\}_r}{\{(\delta-1)n-k+1\}_r}$$

$$\times {}_{p+\delta+c'}F_{q+c'}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n), \triangle(c', -(\delta-1)n+k-r), a_p \\ \triangle(c', -(\delta-1)n), \quad b_q\end{matrix}; \mu x^{-c'}\right]$$

$$\times {}_{l+\gamma+d'}F_{s+d'}\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma, -m), \triangle(d', -(\gamma-1)m+r), \rho_l \\ \triangle(d', -(\gamma-1)m), \quad \sigma_s\end{matrix}; \lambda x^{-d'}\right]. \tag{3·5}$$

(iv) यदि $\delta=c=1,\ \gamma=2,\ d=-d'$ जहाँ d' धनात्मक है और $d'=2$, तो (2·3) तथा (2·4) की सहायता से

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[\left\{{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n,\ a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x\right)\right\}\left\{x^m\ {}_{l+2}F_s\left(\begin{matrix}\frac{-m}{2},\ \frac{-m+1}{2},\ \rho_l\\ \sigma_s\end{matrix};\lambda x^{-2}\right)\right\}\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{k} C_{k,\,r}\frac{(-1)^r(-n)_{k-r}(a_p)_{k-r}\,\mu^{k-r}(-m)_r x^{m-r}}{(b_q)_{k-r}}$$

$$\times {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ a_p+k-r\\ b_q+k-r\end{matrix};\mu x\right){}_{l+2}F_s\left(\begin{matrix}\frac{-m+r}{2},\ \frac{-m+r+1}{2},\ \rho_l\\ \sigma_s\end{matrix};\lambda x^{-2}\right). \tag{3·4}$$

स्पष्टतः $m=0$ या $n=0$, रखने पर सम्बन्ध (3·3), (3·4), (3·5) सम्बन्ध (2·2), (2·3), (2·4) में बदल जाते हैं।

4. इस अनुभाग में हम (3·4) की विशिष्ट दशाओं पर विचार करेंगे।

(a) यदि $a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2},\ \mu=1,$

$$\rho_1=m+\gamma+\delta+1,\ \sigma_1=1+\gamma,\ \sigma_2=\tfrac{1}{2},\ \lambda=1,$$

और दोनों ओर $\dfrac{(1+\alpha)_n(1+\gamma)_m}{n!\ m!}$ से गुणा करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\dots,\ a_p\\ b_3,\dots,\ b_q\end{matrix};x\right)f_m^{(\gamma,\delta)}\left(\begin{matrix}\rho_2,\ \dots,\ \rho_l\\ \sigma_3,\ \dots,\ \sigma_s\end{matrix};x\right)\right]$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n(1+\gamma)_m}{n!\ m!}\sum_{r=0}^{k} C_{k,r}\frac{(-n)_{k-r}(\eta+\alpha+\beta+1)_{k-r}\prod_{j=2}^{p}(a_j)_{k-r}(-m)_r(m+\gamma+\delta+1)_r\prod_{j=2}^{l}(\rho_j)_r}{(1+\alpha)_{k-r}(\frac{1}{2})_{k-r}\prod_{j=3}^{q}(b_j)_{k-r}(1+\gamma)_r(\frac{1}{2})_r\prod_{j=3}^{s}(\sigma_j)_r}$$

$$\times {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ n+\alpha+\beta+1+k-r,\ a_2+k-r,\ \dots,\ a_p+k-r\\ 1+\alpha+k-r,\ \frac{1}{2}+k-r,\ b_3+k-r,\ \dots,\ b_q+k-r\end{matrix};x\right)$$

$$\times {}_{l+1}F_s\left(\begin{matrix}-m+r,\ m+\gamma+\delta+1+r,\ \rho_2+r,\ \dots,\ \rho_l+r\\ 1+\gamma+r,\ \frac{1}{2}+r,\ \sigma_3+r,\dots,\ \sigma_s+r\end{matrix};x\right)$$

जहाँ $f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \dots,\ a_p\\ b_3,\ \dots,\ b_q\end{matrix};x\right)$ सार्वीकृत सिस्टर सेलीन की बहुपदी [5, eqn. (2·2)] है।

जब $m=0$ तो (4·1)

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f_n^{(\alpha_1\beta)}\binom{a_2,\ \ldots,\ a_p}{b_3,\ \ldots,\ b_q};x\right]$$

$$=\frac{(-1)^k(n+\alpha+\beta+1)_k\prod_{j=2}^{p}(a_j)_k}{(\frac{1}{2})_k\prod_{j=3}^{q}(b_j)_k}f_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}\binom{a_2+k,\ \ldots,\ a_p+k}{b_3+k,\ \ldots,\ b_q+k};x\Bigg) \tag{4·2}$$

में परिणत हो जावेगा।

(i) (4·1) में $l=s=3$, $\rho_2=\frac{1}{2}$, $\rho_3=\rho$ तथा $\sigma_3=\sigma$ रखने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f_n^{(\alpha,\beta)}\binom{a_2,\ \ldots,\ a_p}{b_3,\ \ldots,\ b_q};x\Bigg)H_m^{(\gamma,\delta)}(\rho,\sigma,x)\right]$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n(1+\gamma)_m}{n!\ m!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-n)_{k-r}(n+\alpha+\beta+1)_{k-r}\prod_{j=2}^{p}(a_j)_{k-r}(-m)_r(m+\gamma+\delta+1)_r(\rho)_r}{(1+\alpha)_{k-r}(\frac{1}{2})_{k-r}\prod_{j=3}^{q}(b_j)_{k-r}(1+\gamma)_r(\sigma)_r}$$

$$\times{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ n+\alpha+\beta+1+k-r,\ a_2+k-r,\ \ldots,\ a_p+k-r\\ 1+\alpha+k-r,\ \frac{1}{2}+k-r,\ b_3+k-r,\ \ldots,\ b_q+k-r\end{matrix};x\right)$$

$$\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+r,\ m+\gamma+\delta+1+r,\ \rho+r\\ 1+\gamma+r,\ \sigma+r\end{matrix};x\right) \tag{4·3}$$

जहाँ $H_m^{(\gamma,\delta)}(\rho,\sigma,x)$ सार्वीकृत राइस की बहुपदी है। यदि $n=0$, तो (4·3) ज्ञात फल [4, p. 159 eqn. (5·2)] में परिणत हो जाता है।

(ii) (4·1) में $l=s=2$, $\rho_2=\frac{1}{2}$, रखने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f_n^{(\alpha,\beta)}\binom{a_2,\ldots,\ a_p}{b_3,\ldots,\ b_q};x\Bigg)P_m^{(\gamma,\delta)}(1-2x)\right.$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n(1+\gamma)_m}{n!\ m!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-n)_{k-r}(n+\alpha+\beta+1)_{k-r}\prod_{j=2}^{p}(a_j)_{k-r}(-m)_r(m+\gamma+\delta+1)_r}{(1+\alpha)_{k-r}(\frac{1}{2})_{k-r}\prod_{j=3}^{q}(b_j)_{k-r}(1+\gamma)_r}$$

$$\times{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ n+\alpha+\beta+1+k-r,\ a_2+k-r,\ \ldots,\ a_p+k-r\\ 1+\alpha+k-r,\ \frac{1}{2}+k-r,\ b_3+k-r,\ \ldots,\ b_q+k-r\end{matrix};x\right)$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m+r,\ m+\gamma+\delta+1+r\\ 1+\alpha+r\end{matrix};x\right), \tag{4·4}$$

जहाँ $P_m^{(\gamma,\delta)}(x)$ जैकोबी बहुपदी है।

यदि $n=0$ और x को $\frac{1-x}{2}$ द्वारा प्रतिस्थापित करें तो ज्ञात फल [6, p. 263, eqn. (3)] प्राप्त होगा ।

(iii) (4·1) में $\gamma=\delta=0$, $l=2$, $s=3$, $\rho_2=\frac{1}{2}$, $\sigma_3=1$, मानने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f_n^{(\alpha,\beta)}\binom{a_2,\ \ldots,\ a_p}{b_3,\ \ldots,\ b_q};x\Big)Z_m(x)\right]$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n}{n\,!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-n)_{k-r}(n+\alpha+\beta+1)_{k-r}\prod_{j=2}^{p}(a_j)_{k-r}(-m)_r(m+1)_r}{(1+\alpha)_{k-r}(\frac{1}{2})_{k-r}\prod_{j=3}^{q}(b_j)_{k-r}(1)_r(1)_r}$$

$$\times{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ n+\alpha+\beta+1+k-r,\ a_2+k-r,\ \ldots,\ a_p+k-r\\ 1+\alpha+k-r,\ \frac{1}{2}+k-r,\ b_3+k-r,\ \ldots,\ b_q+k-r\end{matrix};x\right)$$

$$\times{}_2F_2\left(\begin{matrix}-m+r,\ m+r+1\\ 1+r,\ 1+r\end{matrix};x\right), \tag{4·5}$$

जहाँ $Z_m(x)$ बेटमैन का बहुपदी है ।

यदि $n=0$ तो (4·5)

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[Z_m(x)\right]=\frac{(-1)^k(m+1)_k}{k\,!}\binom{m}{k}{}_2F_2\left(\begin{matrix}-m+k,\ m+k+1\\ 1+k,\ 1+k\end{matrix};x\right). \tag{4·6}$$

में परिणत हो जावेगा ।

(b) (3·4) में $p=0$, $q=1$, $b_1=1+\alpha$, $\mu=1$, $l=0$, $s=1$, $\sigma_1=1+\gamma$, $\lambda=1$, रखने पर और दोनों और $\frac{(1+\alpha)_n(1+\gamma)_m}{n!\ m!}$ से गुणा करने पर (4·7) की प्राप्ति होगी ।

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\gamma)}(x)\right]=\frac{(1+\alpha)_n(1+\gamma)_m}{n!\ m!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-n)_{k-r}(-m)_r}{(1+\alpha)_{k-r}(1+\gamma)_r}$$

$$\times{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n+k-r\\ 1+\alpha+k-r\end{matrix};x\right){}_1F_1\left(\begin{matrix}-m+r\\ 1+\gamma+r\end{matrix};x\right). \tag{4·7}$$

यदि $m=0$, तो यह

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]=(-1)^kL_{n-k}^{(\alpha+k)}(x). \tag{4·8}$$

में परिणत हो जाता है जो पुनः ज्ञात फल [(5), p.206] का रूप धारण करता है यदि $k=n$.

(c) (3·4) में $p=1$, $q=0$, $a_1=n+a-1$, $\mu=-\frac{1}{b}$, $l=1$, $s=0$, $\rho_1=m+A-1$, $\lambda=-\frac{1}{B}$, रखने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\Big[\gamma_n(x, a, b)\ \gamma_m(x, A, B)\Big]$$

$$=\sum_{r=0}^{k} C_{k,r}(-n)_{k-r}(n+a-1)_{k-r}(-m)_r(m+A-1)_r\left(\frac{-1}{b}\right)^{k-r}\left(\frac{-1}{B}\right)^r$$

$$\times {}_2F_0\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ n+a-1+k-r\\ -\end{matrix};\ -\frac{1}{b}x\right){}_2F_0\left(\begin{matrix}-m+r,\ m+A-1+r\\ -\end{matrix};\ -\frac{1}{B}x\right) \tag{4.9}$$

जहाँ $\gamma_n(x, a, b)$ सार्वीकृत बेसेल बहुपदी है। यदि $m=0$, तो यह ज्ञात फल [3, p. 244, eqn. (3·16)] में परिणत हो जाता है।

4·1. इस अनुभाग में (3·5) की विशिष्ट दशाओं का उल्लेख किया जावेगा यदि $\delta=2$, $\gamma=2$, $c'=d'=2$.

(a) यदि $p=1$, $q=2$, $a_1=\gamma-\beta$, $b_1=\gamma$, $b_2=1-\beta-n$, $\mu=1$, $l=1$, $s=2$, $\rho_1=y-B$, $\sigma_1=y$, $\sigma_2=1-B-m$, $\lambda=1$ तथा दोनों ओर $\frac{2^{n+m}(\beta)_n(B)_m}{n!\ m!}$ से गुणा किया जाय तो

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\Big[R_n(\beta, \gamma\ ;\ x)\ \ R_m(B, y\ ;\ x)\Big]$$

$$=\frac{2^{n+m}(\beta)_n(B)_m}{m!\ \overline{n-k}!}\ x^{n+m-k}\sum_{r=0}^{k} C_{k,r}\frac{(-1)^r(-m)_r}{(n-k+1)_r}$$

$$\times {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{-n+k-r}{2}, \frac{-n+k-r+1}{2}, \gamma-\beta\\ \gamma,\ 1-\beta-n\end{matrix};\ x^{-2}\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{-m+r}{2}, \frac{-m+r+1}{2}, y-B\\ y,\ 1-B-m\end{matrix};\ x^{-2}\right) \tag{4·10}$$

जहाँ $R_n(\beta, \gamma; x)$ वेडीण्ट बहुपदी है।

जब $m=0$, तो

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\Big[R_n(\beta, \gamma; x)\Big]=\frac{2^n(\beta)_n\ x^{n-k}}{\overline{n-k}!}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{-n+k}{2}, \frac{-n+k+1}{2}, \gamma-\beta\\ \gamma,\ 1-\beta-n\end{matrix};\ x^{-2}\right) \tag{4·11}$$

(*b*) $p=0=q,\ \mu=-1,\ l=s=0,\ \lambda=-1$ रखने पर तथा दोनों ओर 2^{n+m} द्वारा गुणा करने से

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\Big[H_n(x)\ H_m(x)\Big]=\frac{2^{n+m}\ n!}{n-k!}\ x^{n+m-k}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-1)^r(-m)_r}{(n-k+1)_r}$$

$$\times{}_2F_0\left(\frac{-n+k-r}{2},\frac{-n+k-r+1}{2};-x^{-2}\right){}_2F_0\left(\frac{-m+r}{2},\frac{-m+r+1}{2};-x^{-2}\right)\qquad(4\cdot12)$$

जहाँ $H_n(x)$ हर्माइट बहुपदी है ।

जब $m=0$ तो हमें ज्ञात फल [6, p. 188, eqn. (5)] प्राप्त होता है ।

4·2. इस अनुभाग में (3·6) की विशिष्ट दशाओं पर विचार किया जावेगा ।

(*a*) यदि $a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2},\ \mu=1,\ l=1,\ s=2,\ \rho_1=y-B,$ $\sigma_1=y,\ \sigma_2=1-B-m,\ \lambda=1$ तथा दोनों ओर $\dfrac{(1+\alpha)_n 2^m(B)_m}{n!\ m!}$ का गुणा किया जाय तो

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ q_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};x\right)R_m(B,y;x)\right]$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n 2^m(B)_m}{n!\ m!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-1)^r(-n)_{k-r}(n+\alpha+\beta+1)_{k-r}\prod_{j=2}^{p}(a_j)_{k-r}(-m)_r\ x^{m-r}}{(1+\alpha)_{k-r}(\frac{1}{2})_{k-r}\prod_{j=3}^{q}(b_j)_{k-r}}$$

$$\times{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ n+\alpha+\beta+1+k-r,\ a_2+k-r,\ \ldots,\ a_p+k-r\\ 1+\alpha+k+r,\ \frac{1}{2}+k-r,\ b_3+k-r,\ \ldots,\ b_q+k-r\end{matrix};x\right)$$

$$\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{-m+r}{2},\ \frac{-m+r+1}{2},\ y-B\\ y,\ 1-B-m\end{matrix};x^{-2}\right)\qquad(4\cdot13)$$

(*b*) $p=0,\ q=1,\ b_1=1+\alpha,\ \mu=1,\ \lambda=1,\ l=1,\ s=2,\ \rho_1=y-B,\ \sigma_1=y,$ $\sigma_2=1-B-m,$ रखने पर तथा दोनों ओर $\dfrac{(1+\alpha)_n\ 2^m(B)_m}{n!\ m!}$, से गुणा करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[L_n^{(\alpha)}(x)\ R_m(B,y;x)\right]=\frac{(1+\alpha)_n 2^m(B)_m}{n!\ m!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-1)^k(-n)_{k+r}(-m)_r x^{m+r}}{(1+\alpha)_{k-r}}$$

$$\times{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n+k-r\\ 1+\alpha+k-r\end{matrix};x\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{-m+r}{2},\ \frac{-m+r+1}{2},\ y-B\\ v,\ 1-B-m\end{matrix};x^{-2}\right).\qquad(4\cdot14)$$

(c) $p=1,\ q=0,\ a_1=a+n-1,\ \mu=-1/b,\ l=1,\ s=2,\ \rho_1=y-B,\ \sigma_1=y,$ $\sigma_2=1-B-m,\ \lambda=1$, होने पर तथा दोनों ओर $\frac{2^m(B)_m}{m!}$, से गुणा करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[\gamma_n(x,\ a,\ b)R_m(B,y;x)\right]=\frac{2^m(B)_m}{m!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}(-1)^r(-n)_{k-r}(-m)_r\, x^{m-r}\left(-\frac{1}{b}\right)^{k-r}$$

$$\times(a+n-1)_{k-r}\ {}_2F_0\left(-n+k-r, a+n-1+k-r\ ;\ -\frac{1}{b}x\right)$$

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{-m+r}{2}, \frac{-m+r+1}{2}; y-B\\ y,\ 1-B-m\end{matrix}; x^{-2}\right)$$

(A) (3·6) में $a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2},\ \mu=1,\ l=s=0,\ \lambda=-1$ होने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{n!}2^m$ से गुणा करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2, \ldots, a_p\\ b_3, \ldots, b_q\end{matrix}; x\right)H_m(x)\right]$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n2^m}{n!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-1)^r(-n)_{k-r}(n+\alpha+\beta+1)_{k-r}\prod_{j=2}^{p}(a_j)_{k-r}(-m)_r\,x^{m-r}}{(1+\alpha)_{k-r}(\frac{1}{2})_{k-r}\prod_{j=3}^{q}(b_j)_{k-r}}$$

$$\times{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k-r,\ n+\alpha+\beta+1+k-r,\ a_2+k-r,\ \ldots,\ a_p+k-r\\ 1+\alpha+k-r,\ \frac{1}{2}+k-r,\ b_3+k-r,\ \ldots,\ b_q+k-r\end{matrix}; x\right)$$

$$\times{}_2F_0\left(\frac{-m+r}{2}, \frac{-m+r+1}{2}\ ;\ -x^{-2}\right) \tag{4·16}$$

(B) (3·6) में $p=0,\ q=1,\ b_1=1+\alpha,\ \mu=1,\ l=0=s,\ \lambda=-1$, होने पर और दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n2^m}{n!}$, से गुणा करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[L_n^{(\alpha)}(x)\ H_m(x)\right]=\frac{(1+\alpha)_n2^m}{n!}\sum_{r=0}^{k}C_{k,r}\frac{(-1)^r(-n)_{k-r}(-m)_r\,x^{m-r}}{(1+\alpha)_{k-r}}$$

$$\times{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n+k-r\\ 1+\alpha+k-r\end{matrix}; x\right){}_2F_0\left(\frac{-m+r}{2}, \frac{-m+r+1}{2}\ ;\ -x^{-2}\right).$$

(C) (3·6) में $p=1, q=0, a_1=a+n-1, \mu=-1/b, l=s=0, \lambda=-1$, होने पर और दोनों ओर 2^m से गुणा करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[\gamma_n(x, a, b) H_m(x)\right] = 2^m \sum_{r=0}^{k} C_{k-r}(-1)^r(-n)_{k-r}(a+n-1)_{k-r}\left(\frac{-1}{b}\right)^{k-r}(-m)_r x^{m-r}$$

$$\times {}_2F_0\left(-n+k-r, a+n-1+k-r ; -\frac{1}{b}x\right) {}_2F_0\left(\frac{-m+r}{2}, \frac{-m+r+1}{2} ; -x^{-2}\right) m^{-r} \tag{4.18}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वी० एम० भिसे, जी० एस० टी० आई०, इन्दौर का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में निर्देशन किया।

निर्देश

1. काल, एच० एल०। **बुले० अमे० मैथ० सोसा०**, 1936, **42**, 423-428.
2. वही। **वही, पृ०** 867-870.
3. चटर्जी, एस० के०। **क्वार्ट० जर्न० मैथ० आक्सफोर्ड**, 1963, **14**, 241-46.
4. खंडेकर, पी० आर०। **प्रोसी० नेशन० एके० (इंडिया) खंड** A, 1964, **34**, 157-162.
5. शाह, मणिलाल। **प्रोसी० नेशन० एके० साइंस, (इंडिया), खंड** A, 1967, 37.
6. रेनविले, ई० डी०। Special functions. **मैकमिलन-कम्पनी, न्यूयार्क** 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No 3, July 1969, Pages 111-114

लैपलास तथा हैंकेल परिवर्तों का एक गुणधर्म

डी० सी० गोखरू

गणित विभाग, राजकीय विद्यालय, भीलवाड़ा, राजस्थान

[प्राप्त—नवम्बर 14, 1967]

सारांश

इस टिप्पणी में लैपलास परिवर्त तथा हैंकेल परिवर्त से सम्बन्धित एक प्रमेय को सिद्ध करते हुये उसकी सहायता से एक अनन्त समाकल प्राप्त किया गया है जिसके उपयोग से विशिष्ट दशा के रूप में $K_\nu(x)$ के लिए एक रोचक समाकल की अभिव्यक्ति हुई है।

Abstract

On a property of Laplace and Hankel transforms. *By* D. C. Gokhroo, Department of Mathematics, Government College, Bhilwara, Rajasthan.

In this note, a theorem on Laplace transform and Hankel transform has been proved and an infinite integral has been evaluated by making its use which yields an interesting integral representation for $K_\nu(x)$ as a particular case.

1. विषय प्रवेश : फलन $\phi(p)$ को

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\,h(t)\,dt \tag{1}$$

द्वारा पारिभाषित किया जाता है जो $h(t)$ का लैपलास परिवर्त कहलाता है। इसमें $h(t)$ को मूल कहा जाता है।

हैंकेल परिवर्त को

$$\phi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\,\mathcal{J}_\nu(pt)\,h(t)\,dt, \tag{2}$$

द्वारा भी पारिभाषित किया जाता है। इस शोध पत्र में (1) तथा (2) को संकेत रूप में क्रमशः

$$\phi(p) \doteqdot h(t) \text{ तथा } \phi(p) \overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}} h(t) \text{ द्वारा व्यक्त किया जावेगा।} \tag{3}$$

इस शोध पत्र का उद्देश्य हैंकेल परिवर्त पर एक प्रमेय को सिद्ध करना एवं इस प्रमेय के उपयोग से एक अनन्त समाकल को विकसित करना है। दूसरे प्रकार के परिवर्द्धित बेसेल फलन के लिए भी एक रोचक व्यंजक को इसके विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किया गया है जो नवीन हो सकता है।

2. **प्रमेय**: यदि $\phi(p) \doteq h(t)$,

तथा
$$\psi(p) \overset{\mathcal{J}}{\underset{\nu}{=}} t^{-3/2} \mathcal{J}_{2\nu}(2\sqrt{t})\ \phi(t),$$

तो
$$\psi(p) = p^{1/2} \int_0^\infty (p^2+t^2)^{-1/2}\, e^{-t/(p^2+t^2)}\, \mathcal{J}_\nu\left(\frac{p}{p^2+t^2}\right) h(t)\, dt, \tag{4}$$

यदि समाकल अभिसारी हो और $|h(t)|$ को लैपलास परिवर्त तथा $|t^{-3/2}\ \mathcal{J}_{2\nu}\ (2\sqrt{t})\phi(t)|$ के हैंकेल परिवर्त विद्यमान हों तथा $R(\nu+\frac{1}{2})>0$.

उपपत्ति :

अब
$$\phi(p) \doteq h(t), \tag{5}$$

तथा [1, p. 186 (38)]

$$\mathcal{J}_\nu(at)\, \mathcal{J}_{2\nu}(2\sqrt{t}) \doteq p(p^2+a^2)^{-1/2}\, e^{-p/(p^2+a^2)}\, \mathcal{J}_\nu\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right), \tag{6}$$

जहाँ $R(\nu+\frac{1}{2})>0$ तथा $R(p)>0$.

(5) तथा (6) में क्रियात्मक फलन का पार्सिवाल गोल्डस्टीन प्रमेय [3, p. 105] व्यवहृत करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^{-1} \mathcal{J}_\nu(at)\ \mathcal{J}_{2\nu}(2\sqrt{t})\ \phi(t)\, dt = \int_0^\infty (a^2+t^2)^{-1/2}\, e^{-t/(t^2+a^2)}\ \mathcal{J}_\nu\left(\frac{a}{t^2+a^2}\right) h(t)\, dt,$$

की प्राप्ति होगी। दोनों ओर a से गुणा करने पर तथा a को p में परिवर्तित करने पर कथित फल की प्राप्ति होती है।

3. **सम्प्रयोग** : यदि हम [1, p. 283 (43)] को लें

$$\begin{aligned}\phi(p) &= p^\rho\, K_{2\nu}(2\sqrt{p}) \\ &\doteq \tfrac{1}{2} t^{1/2-\rho}\, e^{-1/2t}\, W_{\rho-1/2,\,\nu}\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= h(t),\end{aligned}$$

जहाँ $R(p)>0$.

अत: [2, p. 91 (20)] के द्वारा

$$t^{-3/2} \mathcal{J}_{2\nu}(\sqrt{t})\ \phi(t) = t^{\rho-3/2} \mathcal{J}_{2\nu}(2\sqrt{t})\ K_{2\nu}(2\sqrt{t})$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{2^{\rho-3}}{\sqrt{(\pi)}\, p^{\rho-1/2}} G^{3,1}_{2,4}\left(\frac{1}{p^2}\middle| \begin{matrix} 1-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\rho,\ 1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\rho \\ \nu,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\nu \end{matrix}\right)$$

$$= \psi(p),$$

जहाँ $R(\rho+\nu)>0$ तथा $p>0$.

$h(t)$ तथा $\psi(p)$ के इन मानों का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{1/2-\rho}\ (p^2+t^2)^{-1/2}\ e^{-1/2t\ (p^2+3t^2/p^2+t^2)} \mathcal{J}_\nu\left(\frac{p}{p^2+t^2}\right) W_{\rho-1/2,\ \nu}\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{\rho-2}}{p^\rho} G^{3,1}_{2,4}\left(\frac{1}{p^2}\middle| \begin{matrix} 1-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\rho,\ 1+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\rho \\ \nu,\ \frac{1}{2},\ 0, -\nu \end{matrix}\right), \tag{7}$$

प्राप्त होता है, जहाँ $R(p)>0$

(7) की कुछ विशिष्ट रोचक दशायें नीचे दी जा रही हैं :—

(i) $\rho=1$ रखने पर

$$\int_0^\infty t^{-1/2}\ (p^2+t^2)^{-1/2}\ e^{-1/2t\ (p^2+3t^2/p^2+t^2)} \mathcal{J}_\nu\left(\frac{p}{p^2+t^2}\right) W_{1/2,\ \nu}\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \frac{\Gamma\frac{1}{2}(1+3\nu)}{2\Gamma(1+2\nu)} W_{-\nu/2,\ \nu}\left(\frac{2}{p}\right) M_{\nu/2,\ \nu}\left(\frac{2}{p}\right), \tag{8}$$

जहाँ $R(p)>0$.

(ii) दूसरी ओर यदि हम $\rho=\nu+2$ मानें और निम्नांकित सम्बन्ध का उपयोग करें

$$W_{\nu+3/2,\ \nu}(x) = (-1)\ x^{\nu+1/2}\ e^{-x/2}(1+2\nu-x),$$

तो हमें $K_\nu(x)$ के लिये रोचक व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\int_0^\infty t^{-2\nu-3}\ (p^2+t^2)^{-1/2}\ [t(1+2\nu)-1]\ e^{-1/t\ (p^2+2t^2/p^2+t^2)} \mathcal{J}_\nu\left(\frac{p}{p^2+t^2}\right) dt$$

$$= \frac{(-1)}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{\nu+1}}{p^{2\nu+5/2}} K_{1/2-\nu}\left(\frac{2}{p}\right), \tag{9}$$

जहाँ $R(p)>0$.

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms. **भाग** I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1954.

2. वही । Tables of Integral Transforms. **भाग** II, **वही**, 1954.

3. गोल्डस्टीन, एस० । **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1932, (2)**34**, 103-25.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No 3, July 1969, Pages 115-119

आत्म व्युत्क्रम फलनों से सम्बन्धित कतिपय प्रमेय

ओ० पी० शर्मा
गणित विभाग, होल्कर साइंस कालेज, इंदौर

[प्राप्त—जनवरी 1968]

सारांश

(1·2) में परिभाषित सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त में विभिन्न श्रेणियों के आत्मव्युत्क्रम फलनों को सूत्रबद्ध करने के लिये कई प्रमेय स्थापित किये गये हैं ।

Abstract

Some theorems connecting self reciprocal functions. *By* O. P. Sharma, Department of Mathematics, Holkar Science College, Indore.

In this paper, some theorems have been established to connect different classes of self-reciprocal functions in the generalised Hankel transform, defined in (1·2).

1. हैंकेल परिवर्त

$$g(x)=\int_0^\infty \sqrt{(xy)}\; J_\nu(xy)\, f(y)\, dy \tag{1·1}$$

के सार्वीकरण का समावेश नरायन [7, p. 951] द्वारा दिये गये सममित फूरियर न्यष्टि के प्रयोग से निम्नांकित रूप में किया जा सकता है :—

$$g(x)=2\beta\gamma\int_0^\infty (xy)^{\gamma-1/2}\; G^{q,p}_{2p,2q}\left[\beta^2(xy)^{2\gamma}\,\middle|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p-a_1, \ldots, -a_p\\ b_1, \ldots, b_q-b_1, \ldots, -b_q\end{matrix}\right] f(x)\; dy, \tag{1·2}$$

जिसमें β तथा γ वास्तविक अचर हैं ।

यदि $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $p=0$, $q=1$ तथा $b_1=\frac{1}{2}\nu$ हो तो (1·2) बदल कर (1·1) हो जाता है ।

यदि फलन $f(x)$ तथा $g(x)$ एक ही हों तो (1·2) में $f(x)$ को आत्म-व्युत्क्रम कहेंगे और सांकेतिक रूप में उसे $R(a_p\,;\, b_q)$ द्वारा व्यक्त करेंगे ।

नरायन [7, p. 957] द्वारा दिये गये प्रतिस्थापनों का उपयोग करने पर (1·2) की न्यष्टि विशिष्ट दशा के रूप में विभिन्न न्यष्टियाँ प्रदान करती है जो वाटसन [10, p. 308], भटनागर [2, p. 43], नरायन [5, p. 271] तथा [6, p. 298] तथा एवरिट [4, p. 271] द्वारा दी जा चुकी हैं।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य विभिन्न श्रेणियों वाले आत्म व्युत्क्रम फलनों को परस्पर जोड़ने वाली कतिपय प्रमेयों को विकसित करना है। हमारा ध्यान उनकी सही सही उपपत्ति पर न जाकर मुख्यत: फलों पर केन्द्रित होगा। यही कारण है कि यहाँ औपचारिक विधि दी जावेगी।

2. यहाँ हम निम्नांकित प्रमेय का उपयोग करेंगे जिसे हाल ही में इस लेखक[8] ने प्रस्तावित किया है।

(1·1) में $A(\alpha, a)$, [9, p. 252] का फलन $f(x)$ आत्म व्युत्क्रम हो, इसके लिये आवश्यक एवं यथेष्ट शर्त यह है कि

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-s/2\gamma}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j-1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\cdot\psi(s)\,x^{-s}\,dx, \tag{2·1}$$

जिसमें $\psi(s)$ नियमित है और प्रतिबन्ध $\psi(s)=\psi(1-s)$; $s=\sigma+it$ को $a<\sigma<1-a$ (2·2) तथा $\psi(s)=0\left(e^{\{(q-p)\pi/4\gamma-\alpha+\eta\}|t|}\right)$ पट्टी में प्रत्येक घन η के लिये तथा (2·2) को आन्तरिक किसी भी पट्टी में एक समान रूप से पूरा करती है। तथा C (2·2) में σ का कोई भी मान है।

3. **प्रमेय 1:** यदि फलन $f(x)$ $R(a_p\,;\,b_q)$ हो तो फलन

$$g(x)=\int_{e-i\infty}^{ei\infty}Q(u)\,f(xu)\,du, \tag{3·1}$$

$R(c_p\,;\,d_q)$, होगा यदि

$$Q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}+d_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}-c_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}\,l(s)\,x^{-s}\,ds \tag{3·2}$$

जिसमें $l(s)=s(1-s)$. (3·3)

उपपत्ति : (3·1) में (2·1) का प्रयोग करने पर और फिर समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-(s/2\gamma)}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\,.\,\psi(s)\,.\,x^{-s}\,ds\times\int_{e^{-i\infty}}^{e^{i\infty}}u^{-s}\,Q(u)\,du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-(s/2\gamma)}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\,.\,\psi(s)\,x^{-s}\,ds$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(1-s)t}\,.\,Q(e^{it})\,dt. \tag{3·4}$$

अब (3·2) के द्वारा

$$Q(e^{it})=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-its}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}+d_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}-c_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}\,l(s)\,ds. \tag{3·5}$$

अतः (3·5) में फूरियर सूत्र के चरघातांकी रूप [9, p. 4(1.2.5—1.2.6)] को व्यवहृत करने पर तथा s को $(1-s)$ द्वारा पुनः प्रतिस्थापित करनें पर हमें

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{it(1-s)}Q(e^{it})\,dt=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}+b_j-\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}-a_j-\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-c_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\,.\,l(s).$$

प्राप्त होगा। (3·4) में इस मान को रखने पर हमें

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-(s/2\gamma)}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-c_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\,.\,\chi(s)\,x^{-s}\,ds,$$

प्राप्त होगा। जिसमें

$$\chi(s)=i\,.\,\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}\right)+b_j+\frac{s}{2\gamma}\Big)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}+b_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}-a_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}\,l(s)\,\psi(s),$$

जिससे कि

$\chi(s)=\chi(1-s)$.

अतः (2·1) के बल पर $g(x)$ $R(c_p\,;\,d_q)$ होगा

3·1. **उपप्रमेय :** $a_j=c_j$ $(j=1, \ldots, p)$ तथा $b_h=d_h$ समानीत $(h=1, \ldots, q)$ रखने पर उपर्युक्त प्रमेय निम्नांकित हो जावेगी

"यदि $f(x)$, $R(a_p\,;\,b_q)$ हो तो

$$g(x)=\int_{e^{-i\infty}}^{e^{i\infty}} Q(u)\, f(x\,u)\, du$$

भी $R(a_p\,;\,b_q)$ होगा, यदि

$$Q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(s)\; x^{-s}\, ds \tag{3·6}$$

जहाँ $\lambda(s)=\lambda(1-s)$."

3·2. **विशिष्ट दशायें :** अनुभाग 1 के अनुसार, (1·2) में पारिभाषित परिवर्त को हैंकेल परिवर्त के विभिन्न सार्वीकरणों में समानयन किया जा सकता है और उपर्युक्त प्रमेय उपर्युक्त प्रतिस्थापन करने पर कई नवीन फलों को विशिष्ट दशाओं के रूप में प्रदान करेगा।

$\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $p=0$, $q=1$, $b_1=\frac{\mu}{2}$ तथा $d_1=\frac{\nu}{2}$ रखने पर प्रमेय 1 बृजमोहन [3, p. 93] के ज्ञात फल में बदल जावेगी।

3·3. **उदाहरण :** x को s द्वारा; e^{-ic} को x द्वारा प्रतिस्थापित करने पर तथा ज्ञात परिणाम [1, p. 379 (2)] में $b=a$, $\mu=v-1$ रखने पर हमें

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_{\nu-s}(a)\, \mathcal{J}_{\nu-1+s}(a)\; x^{-s}\, ds=x^{-1/2}\, \mathcal{J}_{2\nu\cdot 1}\Big[a\Big(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\Big], \tag{3·7}$$

सरलतापूर्वक प्राप्त होगा जिसमें $Re(\nu)>-1$ तथा $e^{-i\pi}<x<e^{i\pi}$.

स्पष्टतः (3·7) उसी रूप में है जिस रूप में (3·6) है।

अतः यदि $f(x)$ $R(a_p\,;\,b_q)$, हो तो फलन

$$g(x)=\int_{e^{-i\infty}}^{e^{i\infty}} u^{-1/2}\, \mathcal{J}_{2\nu-1}\Big[a\Big(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\Big)\Big]\cdot f(xu)\; du$$

भी $R(a_p\,;\,b_q)$ होगा।

4. **प्रमेय 2:** यदि $f(x)=R(a_p\,;\,b_q)$ तो फलन

$$g(x)=\int_{e^{-i\infty}}^{e^{i\infty}} Q(xu)\, f(u)\, du$$

$R(c_p\,;\,d_q)$ होगा और इसका विलोम भी, यदि

$$Q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\beta^{-s/\gamma}\frac{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-c_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\,.\,l(s)\,x^{-s}\,ds,$$

जहाँ $l(s)$ द्वारा (3·3) की तुष्टि हो । इसकी उपपत्ति प्रमेय-1 की ही भाँति होगी ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० के० सक्सेना का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र के लेखन में मेरी सहायता की ।

निर्देश

1. बेटमैन प्रोजेक्ट । Tables of Integral Transform, **भाग** II, **मैकग्राहिल**, 1954.
2. भटनागर, के० पी० । **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1955, **47**, 43-52,
3. बृजमोहन । **प्रोसी० बनारस मैथ० सोसा०**, 1939, **1**, 93-96.
4. एवरिट, डब्लू० एन० । **क्वार्ट० जर्न० मैथ०, आक्सफोर्ड**, 1959, **10-II**, 270-79.
5. नरायन, आर० । Rendi. Sem. Math. Torino, 1956-57, **16**, 269-300.
6. वही । **मैथ० जत्साइट०**, 1959, **70**, 297-99.
7. वही । **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1962, **13**, 950-59.
8. शर्मा, ओ० पी० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया) (प्रेस में)**
9. टिच्मार्श, ई० टी० । Introduction to the theory of Fourier Integrals. **आक्सफोर्ड**, 1948.
10. वाटसन, जी० एन० । **क्वार्ट० जर्न० मैथ०, आक्सफोर्ड**, 1931, **2-1**, 298-309.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 3, July 1969, Pages 121-124

लेगेण्ड्र फलनों से सम्बन्धित कतिपय अनन्त समाकल

आर० एस० जौहरी
गणित विभाग, राजकीय विद्यालय, अजमेर

[प्राप्त-दिसम्बर 2, 1967]

सारांश

क्रियात्मक कलन की सहायता से कतिपय अनन्त समाकल प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Some infinite integrals involving Legendre functions. *By*. R. S. Johri, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

Some infinite integrals have been evaluated by making use of operational calculus.

1. फलन $f(t)$ का हैंकेल परिवर्त

$$\phi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\mathcal{J}_\nu(pt)f(t)\,dt \qquad p>0 \tag{1·1}$$

समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसे सांकेतिक रूप में हम

$$\phi(p)\ \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\ f(t)$$

द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

2. प्रमेय

यदि

$$\phi(p)\ \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\ f(t)$$

तथा

$$\psi(p)\ \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\ t^{\rho+\nu-\mu}K_\rho(\beta t)\,\phi(t)$$

तो

$$\psi(p)=2^{\rho+\nu-\mu-1}p^{\mu-\rho-\nu-2}(\Gamma\mu+1)^{-1}\,\Gamma(\rho+\nu+1)\ \Gamma(\rho+1)\ \Gamma(\nu+1)$$
$$\times\int_0^\infty x^{1/2}(\cosh\sigma-\cos\theta)\ P^{-\rho}_{\rho+\nu-\mu}(\cos\theta)P^{-\nu}_{\rho+\nu-\mu}(\cosh\sigma)\,dx$$

जहाँ $x+i\beta=ip\cot[\frac{1}{2}(\theta+i\sigma)],\ R(\beta)>|I_m p|,\ R(\nu)>-1,\ R(\rho+\nu)>1$

उपपत्ति: हम जानते हैं कि

$$\phi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}f(t) \tag{1·2}$$

तथा

$$\psi(p)\underset{\mu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}t^{\rho+\nu-\mu}K_\rho(\beta t)\phi(t) \tag{1·3}$$

अतः

$$\psi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\mathcal{J}_\mu(pt)\,t^{\rho+\nu-\mu}K_\rho(\beta t)\phi(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\mathcal{J}_\mu(pt)t^{\rho+\nu-\mu}K_\rho(\beta t)\,dt\int_0^\infty f(x)\mathcal{J}_\nu(tx)(tx)^{1/2}\,dx$$

समाकलन का क्रम बदलने पर

$$=\int_0^\infty f(x)\,dx\int_0^\infty t^{\rho+\nu-\mu+1/2}\mathcal{J}_\mu(pt)K_\rho(\beta t)\mathcal{J}_\nu(tx)(tx)^{1/2}\,dt$$

$$=2^{\rho+\nu-\mu-1}p^{\mu-\rho-\nu-2}\Gamma(\mu+1)^{-1}\,\Gamma(\rho+\nu+1)\ \Gamma(\rho+1)\ \Gamma(\nu+1)$$

$$\times\int_0^\infty x^{1/2}(\cosh\sigma-\cos\theta)\,P^{-\rho}_{\rho+\nu-\mu}(\cos\theta)\,P^{-\nu}_{\rho+\nu-\mu}(\cosh\sigma)f(x)\,dx$$

[(2), p. 65 (14)]

जहाँ

$$\cos\theta=\frac{x^2+\beta^2-p^2}{\sqrt{\{(x^2+\beta^2)^2-2p^2x^2+p^2(2\beta^2+p^2)\}}}$$

$$\cosh\sigma=\frac{(x^2+\beta^2+p^2)}{\sqrt{\{(x^2+\beta^2+p^2)-4p^2x^2\}}}$$

समाकलन के क्रम में लाये गये परिवर्तन को न्या चत माना जा सकता है, क्योंकि हैंकेल परिवर्तों की विद्यमानता के कारण (1·2) तथा (1·3) पूर्णतः अभिसारी हैं।

3. **सम्प्रयोग 1 :**

[2, p. 45 (4)] का उपयोग करने पर

$$f(t)=t^{1/2}(a^2+t^2)^{-\lambda/2}\Gamma(\lambda+\nu)\,P^{-\nu}_{\lambda-1}[a(a^2+t^2)^{-1/2}],\ R(a)>0,\ R(\nu)>-1,\ R(\lambda)>\tfrac{1}{2}$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}p^{\lambda-3/2}e^{-ap}$$

$$=\phi(p)$$

हमें [1] प्राप्त होगा

$$t^{\rho+\nu-\mu}K_{\rho}(\beta t)\phi(t)=t^{\rho+\nu-\mu+\lambda-3/2}K_{\rho}(\beta t)e^{-at}$$

$$\underset{\mu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\sum_{\rho,-\rho}\frac{2^{\lambda+\rho+\nu-\mu-2}p^{\mu+1/2}\beta^{\rho}\,\Gamma\tfrac{1}{2}(\lambda+2\rho+\nu)\Gamma\tfrac{1}{2}(\lambda+2\rho+\nu+1)\Gamma(-\rho)}{1+\mu!\,a^{\lambda+2\rho+\nu}\,\pi^{1/2}}$$

$$\times F_4\left(\frac{\lambda+2\rho+\nu}{2},\ \frac{\lambda+2\rho+\nu+1}{2};\ 1+\mu,\ 1+\rho;\ \frac{-p^2}{a^2},\ \frac{\beta^2}{a^2}\right)$$

$$=\psi(p),\ R(\lambda+2\rho+\nu)>0,\ R(a+\beta)>0,\ p>0$$

प्रमेय को व्यवहृत करने पर

$$\int_0^{\infty}x(\cosh\sigma-\cos\theta)P^{-\rho}_{\rho+\nu-\mu}\ (\cos\theta)\,P^{-\nu}_{\rho+\nu-\mu}\ (\cosh\sigma)\,P^{-\nu}_{\lambda-1}\,[a(a^2+x^2)^{-1/2}]\,dx$$

$$=\frac{2^{\mu-\rho-\nu+1}p^{\rho+\nu}}{\Gamma(\lambda+\nu)\ \Gamma(\rho+\nu+1)\Gamma(\rho+1)\Gamma(\nu+1)}$$

$$\sum_{\rho,-\rho}\ \frac{2^{\lambda+\rho+\nu-\mu-2}\beta^{\rho}\ \Gamma\tfrac{1}{2}(\lambda+2\rho+\nu)\ \Gamma\tfrac{1}{2}(\lambda+2\rho+\nu+1)\Gamma(-\rho)}{a^{\lambda+2\rho+\nu}\pi^{1/2}}$$

$$\times F_4\left(\frac{\lambda+2\rho+\nu}{2},\ \frac{\lambda+2\rho+\nu+1}{2};\ 1+\mu,\ 1+\rho;\ \frac{-p^2}{a^2},\ \frac{\beta^2}{a^2}\right),$$

$$R(\lambda+2\rho+\nu)>0,\ R(a+\beta)>0,\ p>0,\ ip\cot\left(\frac{\theta+i\sigma}{2}\right)=x+i\beta$$

सम्प्रयोग 2 :

[2, p. 53 (37)] को लेने पर

$$f(t)=x^{\alpha-\beta-\nu-3/2}\mathcal{J}_{\beta}(ax)\mathcal{J}_{\alpha}(bx),\ R(\alpha)>0,\ R(\alpha-\beta-\nu)<\frac{5}{2}$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\frac{2^{\alpha-\beta-\nu-1}p^{\nu+1/2}a^{\beta}\,\Gamma\alpha}{b^{\alpha}\,\Gamma(\beta+1)\ \Gamma(\nu+1)}\qquad(0<p<p<b-a)$$

$$=\phi(p)$$

हमें [2, p. 63 (4)] प्राप्त होगा :

$$t^{\rho+\nu-\mu}K_{\rho}(\beta t)\phi(t)=\frac{t^{\rho+2\nu-\mu+1/2}\,2^{\alpha-\beta-\nu-1}\,a^{\beta}\,\Gamma\alpha K_{\rho}(\beta t)}{b^{\alpha}\ \Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\nu+1)}$$

$$\underset{\mu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\frac{2^{\alpha-\beta+\nu-\mu+\rho-1}a^{\beta}\Gamma\alpha\ \Gamma(\nu+\rho+1)\ \Gamma\tfrac{1}{2}(\nu+1)\ p^{\mu+1/2}}{b^{\alpha}\Gamma(\beta+1)\Gamma(\nu+1)\ \Gamma(\mu+1)\beta^{\rho+2\nu+2}}\quad {}_2F_1\left(\nu+\rho+1,\ \nu+1;\ \mu+1;\ \frac{-p^2}{\beta^2}\right)$$

$$=\psi(p),\ \ R(\beta)>0,\ R(\rho+2\nu+2)>|\ R(\rho)\ |$$

प्रमेय को व्यवहृत करने पर हमें निम्नांकित प्राप्त होगा :

$$\int_0^\infty x^{\alpha-\beta-\nu-1}(\cosh\sigma-\cos\theta)\, P^{-\rho}_{\rho+\nu-\mu}(\cos\theta) P^{-\nu}_{\rho+\nu-\mu}(\cosh\sigma) J_\beta(ax) J_\alpha(bx)\, dx$$

$$=\frac{2^{\alpha-\beta} a^\beta p^{\rho+\nu+3/2}\Gamma\alpha}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\nu+1)\, b^\alpha \beta^{\rho+2\nu+2}}\; {}_2F_1\left(\nu+\rho+1,\ \nu+1;\ \mu+1;\ \frac{-p^2}{\beta^2}\right),$$

$$R(\beta)>0,\ R(\rho+2\nu+2)>|\,R(\rho)\,|$$

$$ip\cot\left(\frac{\theta+i\sigma}{2}\right)=x+i\beta$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में डा० एच० बी० मल्लू ने जो रुचि दिखाई उसके लिये लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. बेली, डब्लू० एन०। Infinite Integrals involving Bessel Functions. **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1936, **40**, 37-48.

2. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य। Tables of Integral Transforms. **भाग**, II **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 3, July 1969, Pages 125-131

परागोलीय बहुपदियों का सार्वीकरण

भैरो नाथ
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त-दिसम्बर 19, 1967]

सारांश

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय समीकरण

$$\left[\prod_{i=0}^{s-1}\left(\theta'-\frac{i}{s}\right)-z^s\left(\theta'-\frac{n(s-1)}{s}\right)\prod_{i=1}^{s-1}\left(\theta'+\frac{n+s\nu+i}{s}\right)\right]y=0$$

जहाँ $\theta'=z^s \frac{d}{dz^s}$, n धन पूर्णांक है और $s\geqslant 2$ पूर्णांक है, को सार्वीकृत परागोलीय बहुपदियों एवं उनसे सम्बद्ध अनेक फलों के अध्ययन के लिये आधारभूत चुना गया है।

Abstract

A generalization of ultraspherical polynomials. *By* Bhairo Nath, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper the generalized hypergeometric equation

$$\left[\prod_{i=0}^{s-1}\left(\theta'-\frac{i}{s}\right)-z^s\left(\theta'-\frac{n(s-1)}{s}\right)\prod_{i=1}^{s-1}\left(\theta'+\frac{n+s\nu+i}{s}\right)\right]y=0$$

where $\theta'=z^s \frac{d}{dz^s}$, n is a positive integer and s is an integer $\geqslant 2$, has been made the basis for the study of generalized ultraspherical polynomials and various results associated with them.

1. भूमिका :

हम सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय समीकरण

$$\left[\prod_{i=0}^{s-1}\left(\theta'-\frac{i}{s}\right)-z^s\left(\theta'-\frac{n(s-1)}{s}\right)\prod_{i=1}^{s-1}\left(\theta'+\frac{n+s\nu+i}{s}\right)\right]y=0, \tag{1·1}$$

पर विचार करेंगे जिसमें $\theta' = z^s \frac{d}{dz^s}$, n धन पूर्णांक है तथा $s \geqslant 2$ पूर्णांक है ।

यदि हम (1·1) में $s=2$ में रखें तो

$$\left[z^2 \frac{d}{dz^2}\left(z^2 \frac{d}{dz^2} - \frac{1}{2}\right) - z^2\left(z^2 \frac{d}{dz^2} - \frac{n}{2}\right)\left(z^2 \frac{d}{dz^2} + \frac{n+2\nu+1}{2}\right)\right] y = 0. \qquad (1·2)$$

प्राप्त होगा ।

अवकल समीकरण (1·2) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z(1+\nu)\frac{dy}{dz} + n(n+2\nu+1)y = 0. \qquad (1·3)$$

परागोलीय बहुपदी[1] अवकल समीकरण (1·3) का बहुपदी-हल है ।

प्रस्तुत शोधपत्र में अवकल समीकरण (1·1) को सार्वीकृत परागोलीय बहुपदियों एवं उनसे सम्बद्ध विविध फलों यथा हाइपरज्यामितीय रूप, रोड्रिग्स का सूत्र, आवर्तन सम्बन्ध, जनक फलन, समाकल निरूपण आदि की स्थापना की जावेगी ।

2. (1·1) के हलों को

$$z^m {}_sF_{s-1}\left[\frac{-n(s-1)+m}{s}, \left(\frac{n+s\nu+m+i}{s}\right)_{i=1}^{s-1}; \left(\frac{s+m-j}{s}\right)_{j=1}^{m-1}, \frac{s+m}{s}, \left(\frac{s+m-j}{s}\right)_{j=m+1}^{s-1}; z^s\right]$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, s-1, \qquad (2·1)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जिसमें ${}_sF_{s-1}$ सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के लिये आया है ।

ये हल $|z|<1$ के लिए सुस्पष्ट एवं वैध हैं। $m=0$ के लिये n धन पूर्णांक है, अतः (2·1) एक बहुपदी में घटित होता है ।

यदि $|z|>1$, तो (1·1) के हलों को सुगमता से $z=1/z'$ रख कर प्राप्त किया जाता है और उन्हें

$$z^{n(s-1)} {}_sF_{s-1}\left[\left(\frac{i-n(s-1)}{s}\right)_{i=0}^{s-1}; \left(\frac{s-ns-s\nu-i}{s}\right)_{i=1}^{s-1}; z^{-s}\right] \qquad (2·2)$$

तथा $z^{-(s\nu+n+m)} {}_sF_{s-1}\left[\left(\frac{n+s\nu+m+i}{s}\right)_{i=0}^{s-1}; \left(\frac{s+m-j}{s}\right)_{j=1}^{m-1}, \frac{s+ns+s\nu+m}{s}, \left(\frac{s+m-j}{s}\right)_{j=m+1}^{s-1}; z^{-s}\right]$

$$m = 1, 2, \ldots, s-1. \qquad (2·3)$$

द्वारा दिया जाता है ।

n के धन पूर्णांक होने से (2·2) एक बहुपदी में घटित हो जाता है जिसे हम सार्वीकृत परागोलीय बहुपदी कहेंगे। बाद में हम इस बहुपदी का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

3. अब हम अवकल समीकरण (1·1) से कुछ अन्य रूप प्राप्त करेंगे।

$$\text{अब}\quad \theta' = z^s \frac{d}{dz^s} = \frac{z}{s}\,\frac{d}{dz} = \frac{\theta}{s} \quad (\text{मान लो})$$

तो समीकरण (1·1)

$$\left[\prod_{i=0}^{s-1} (\theta - i) - z^s (\theta - s - \overline{in}) \prod_{i=1}^{s-1} (\theta + n + s\nu + i)\right] y = 0. \tag{3·1}$$

का रूप धारण करेगा। समीकरण (3·1) को भी

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-ns-\nu s} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} (z^{n+s+s\nu-1} y)\right] = z^{-(s-1)n-1} \frac{d^s y}{dz^s}. \tag{3·2}$$

के रूप में लिखा जा सकता है। (3·2) का अवकलन करने पर

$$(1 - z^s) \frac{d^s y}{dz^s} + \sum_{r=1}^{s} \binom{s}{r} (n+s+s\nu-r+1)_{r-1} (nr+\nu r-n-s-s\nu+1) z^{s-r} \frac{d^{s-r} y}{dz^{s-r}} = 0. \tag{3·3}$$

4. सार्वीकृत परागोलीय बहुपदी

परिभाषा: हम (2·2) में $\frac{(1+s\nu)_{sn}}{s^n(1+s\nu)_n(sn-n)!}$ का गुणा करके इसे $C^{\nu}_{n,s}(z)$ द्वारा व्यक्त करेंगे। इसलिए

$$C^{\nu}_{n,s}(z) = \frac{1}{s^n(1+s\nu)_n} \frac{(1+s\nu)_{sn}}{(sn-n)!} z^{n(s-1)}\ {}_sF_{s-1}\left[-\frac{n(s-1)}{s}, \left(\frac{i-n(s-1)}{s}\right)_{i=1}^{s-1}; \left(\frac{s-ns-s\nu-i}{s}\right)_{i=1}^{s-1}; z^{-s}\right]. \tag{4·1}$$

इसे हम सार्वीकृत परागोलीय बहुपदी कहकर पुकारेंगे।

5. रोड्रिग्स का सूत्र

हम रोड्रिग्स का सूत्र निकालेंगे जिसमें $(s\nu)$ को कोई धनपूर्णांक मान लिया जावेगा।

(4·1) से हमें

$$C^{\nu}_{n,s}(z) = \frac{1}{s^n(n+s\nu)!} \frac{(sn+s\nu)!}{(sn-n)!} z^{sn-n} \sum_{r=0}^{[n(s-1)/s]} \frac{\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{-sn+n+i-1}{s}\right)_r}{r!\prod_{i=1}^{s-1}\left(\frac{s-sn-s\nu-i}{s}\right)_r} z^{-sr}$$

$$=\frac{1}{s^n(n+s\nu)!}\ z^{sn-n}\sum_{r=0}^{[(n-n)/s]}\frac{(-1)^r(n+\nu-r+1)_r}{r!}\frac{(sn+s\nu-rs)!}{(sn-n-rs)!}\ z^{-sr}. \tag{5·1}$$

प्राप्त होगा।

$\because \quad \dfrac{1}{(sn-n-rs)!}=0$ यदि r का सम्बन्ध $\left\{\left[\dfrac{sn-n}{s}\right]+1,\ \left[\dfrac{sn-n}{s}\right]+2,\ \ldots,\right\}$,

समूह से हो तो (5·1) से अनुगमन होगा कि :

$$C_{n,\,s}^{\nu}(z)=\frac{1}{s^n(n+s\nu)!}\ z^{sn-n}\left\{\sum_{r=0}^{(sn-n/s)}+\sum_{r=[sn-n/s]+1}^{\infty}\right\}\frac{(-1)^r(n+\nu-r+1)_r}{r!}\frac{(sn+s\nu-rs)!}{(sn-n-rs)!}\ z^{-sr}$$

$$=\frac{1}{s^n(n\cdot s\nu)!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(n+\nu-r+1)_r}{r!}\frac{(sn+s\nu-rs)!}{(sn-n-rs)!}\ z^{sn-n-rs} \tag{5·2}$$

$$\because \qquad \frac{d^{n+s\nu}}{dz^{n+s\nu}}\ z^{s\,(n+\nu-r)}=\frac{(sn+s\nu-rs)!}{(sn-n\cdot rs)!}\ z^{sn-n-rs}$$

यदि $(s\nu)$ धन पूर्णांक हो तो (5·2) से यह अनुगमन होता है कि

$$C_{n,\,s}^{\nu}(z)=\frac{1}{s^n(n+s\nu)!}\frac{d^{n+s\nu}}{dz^{n+s\nu}}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(n+\nu-r+1)_r}{r!}\ z^{s\,(n+\nu-r)}\right)$$

$$=\frac{1}{s^n(n+s\nu)!}\frac{d^{n+s\nu}}{dz^{n+s\nu}}\ (z^s-1)^{n+\nu}\ , \tag{5·3}$$

जिसे रोड्रिग्स का सूत्र कहते हैं।

6. $C_{n,\,s}^{\nu}(z)$ के लिए आवर्तन सम्बन्ध

हम $C_{n,\,s}^{\nu}$ के लिए आवर्तन सम्बध प्राप्त करेंगे जहाँ $(s\nu)$ कोई धन पूर्णांक है।

कोशी-प्रमेय के सम्प्रयोग से हमें

$$C_{n,\,s}^{\nu}(z)=\frac{1}{2\pi i\, s^n}\int_C\frac{(t^s-1)^{n+\nu}}{(t-z)^{n+s\nu+1}}\,dt,$$

प्राप्त होगा जिसमें C कोई कंटूर है जिसके लिए z अन्तर्वर्ती बिन्दु है।

अब $$\frac{d}{dt}\left[\frac{t(t^s-1)^{n+\nu}}{(t-z)^{n+s\nu+1}}\right]=n(s-1)\ \frac{(t^s-1)^{n+\nu}}{(t-z)^{n+s\nu+1}}+\frac{(ns+\nu s)(t^s-1)^{n+\nu-1}}{(t-z)^{n+s\nu+1}}$$
$$-(n+s\nu+1)z\frac{(t^s-1)^{n+\nu}}{(t-z)^{n+s\nu+2}}. \tag{6·1}$$

(6·1) को C की दिशा में दोनों ओर समाकलित करने तथा (5·3) के प्रयोग से :

$$n(s-1)(n+s\nu)\, C^{\nu}_{n,s}(z)+(n+\nu)\frac{d}{dz}\, C^{\nu}_{n-1,s}(z)-z(n+s\nu)\frac{d}{dz}\, C^{\nu}_{n,s}(z)=0. \quad (6·2)$$

समीकरण (6·2) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\left\{n(s-1)+1\right\} C^{\nu}_{n,s}(z)=\frac{d}{dz}\left\{z\, C^{\nu}_{n,s}(z)\right\}-\left(\frac{n+\nu}{n+s\nu}\right)\frac{d}{dz}\, C^{\nu}_{n-1,s}(z). \quad (6·3)$$

समीकरण (6·3) को z के सापेक्ष समाकलित करने पर

$$\left\{n(s-1)+1\right\}\int C^{\nu}_{n,s}(z)\,dz=z\, C^{\nu}_{n,s}(z)-\left(\frac{n+\nu}{n+s\nu}\right) C^{\nu}_{n-1,s}(z). \quad (6·4)$$

$\int dz\int dz \dots \int C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz$, r समाकल की r बार पुनः आवृत्तियों को

$\int_{(r)} C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz$, द्वारा प्रदर्शित करने पर हमें (6·4) से

$$\left\{n(s-1)+1\right. \int_{(r)} C^{\nu}_{n,s}(z)\,dz=\int_{(r-1)} z\, C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz-\left(\frac{n+\nu}{n+s\nu}\right)\times$$

$$\int_{(r-1)} C^{\nu}_{n-1,s}(z)\, dz. \quad (6·5)$$

प्राप्त होगा। तथा

$$\int_{(r-1)} z\, C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz=-(r-1)\int_{(r)} C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz+z\int_{(r-1)} C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz. \quad (6·6)$$

(6·6) तथा (6·5) से

$$\left\{n(s-1)+r\right\}\int_{(r)} C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz=z\int_{(r-1)} C^{\nu}_{n,s}(z)\, dz-\left(\frac{n+\nu}{n+s\nu}\right)\int_{(r-1)} C^{\nu}_{n-1,s}(z)\, dz. \quad (6·7)$$

अब $$C^{\nu}_{n,s}(z)=\frac{(n+\nu)}{s^{n-1}(n+s\nu)!}\frac{d^{n+s\nu-1}}{dz^{n+s\nu-1}}\left[(z^{s}-1)^{n+\nu-1}\, z^{s-1}\right]$$

$$=\left(\frac{n+\nu}{n+s\nu}\right)\left\{z^{s-1}\, C^{\nu}_{n-1,s}(z)+\binom{n+s\nu-1}{1}\cdot(s-1)^{s-2}z^{s-2}\right.$$

$$\times\int C_{n-1,s}(z)\, dz+\binom{n+s\nu-1}{2}(s-1)(s-2)\int_{(2)} C^{\nu}_{n-1,s}(z)\, dz+\dots$$

$$\left.\dots+\binom{n+s\nu-1}{s-1}(s-1)!\int_{(s-1)} C^{\nu}_{n-1,s}(z)\, dz\right\}. \quad (6·8)$$

(6·8) तथा (6·7) से हमें

$$C_{n,s}^{\nu}(z)=a_{n-1}C_{n-1,s}^{\nu}(z)\,z^{s-1}+a_{n-2}C_{n-2,s}^{\nu}(z)\,z^{s-2}+\ldots+a_{n-s}C_{n-s,s}^{\nu}(z),$$

प्राप्त होगा जिसमें समस्त a अचर हैं जिनमें n, s, तथा ν निहित हैं ।

प्रमेय :

$$C_{n,s}^{\nu}(z)=\frac{1}{s^n(n+s\nu)!}\frac{d^{n+s\nu}}{dz^{n+s\nu}}(z^s-1)^{n+\nu}$$ द्वारा

$$C_{n+1,s}^{\nu}(z)=a_n C_{n,s}^{\nu}(z)\,z^{s-1}+a_{n-1}C_{n-1,s}^{\nu}(z)\,z^{s-2}+\ldots+a_{n-s+1}C_{n-s+1,s}^{\nu}(z).$$

की तुष्टि होती है ।

7. $C_{n,s}^{\nu}(z)$ के लिए जनक फलन

चूंकि
$$\sum_{r=[(sn-n)/s]+1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{-sn+n+i-1}{s}\right)_r}{r!\prod_{i=0}^{s-1}\left(\frac{-sn-s\nu+i}{s}\right)_r}z^{-sr}=0,$$

अतः (4·1) से अनुगमन होता है कि

$$C_{n,s}^{\nu}(z)=\frac{z^{sn-n}}{s^n(1+s\nu)_n}\frac{(1+s\nu)_{sn}}{(sn-n)!}\sum_{r=0}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{-sn+n+i-1}{s}\right)_r}{r!\prod_{i=1}^{s-1}\left(\frac{-sn-s\nu+i}{s}\right)_r}z^{-sr}$$

$$=\frac{z^{sn-n}}{s^n(1+s\nu)_n}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n-\nu)_r(1+s\nu)_{sn-sr}}{r!\,(1)_{sn-n-sr}}z^{-sr}. \tag{7·1}$$

नीचे दिये हुये संकलन पर विचार करें

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+s\nu)_n}{(1+\nu)_n}C_{n,s}^{\nu}(z)\,t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n-\nu)_r(1+s\nu)_{sn-sr}}{s^n(1+\nu)_n\,r!\,(1)_{sn-n-sr}}\times z^{sn-n-sr}\,t^n. \tag{7·2}$$

घात श्रेणी के गुणन के कोशी-सिद्धान्त का प्रयोग करने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+s\nu)_n}{(1+\nu)_n}C_{n,s}^{\nu}(z)\,t^n=\sum_{n,r=0}^{\infty}\frac{(1+s\nu)_{sn}(-sn+n)_r}{s^{n+r}(1+\nu)_n\,r!\,(sn-n)!}z^{sn-n-r}\,t^{n+r}. \tag{7·3}$$

$$=\sum_{n,r=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{s\nu+i}{s}\right)_n}{n!\,(1+\nu)_n\prod_{i=1}^{s-2}\left(\frac{i}{s-1}\right)_n}\left(\frac{sz}{s-1}\right)^{n(s-1)}t^n\,\frac{(-sn+n)_r}{r!}\left(\frac{t}{sz}\right)^r$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{s} \left(\frac{s\nu+i}{s}\right)_n}{n!\,(1+\nu)_n \prod_{i=1}^{s-2} \left(\frac{i}{s-1}\right)_n} \left(\frac{sz}{s-1}\right)^{n(s-1)} t^n \left(1-\frac{t}{sz}\right)^{n(s-1)}$$

$$= {}_sF_{s-1} \left[\left(\frac{s\nu+i}{s}\right)_{i=1}^{s} ; 1+\nu, \left(\frac{i}{s-1}\right)_{i=1}^{s-2} ; t \left\{ \frac{1}{s-1} (sz-t) \right\}^{s-1} \right],$$

प्राप्त होगा जिसमें $|z| < \frac{(s-1)-|t^{s/(s-1)}|}{s\,|t^{1/s-1}|}$ फलन ${}_sF_{s-1}$ का अभिसरण होता है

8. $C_{n,s}^{\nu}(z)$ के लिए समाकल निरूपण

(4·1) के उपयोग से $C_{n,s}^{\nu}$ के निम्नांकित फल को सिद्ध किया जा सकता है

$$C_{n,s}^{\nu}(z) = \frac{1}{s^n (1+s\nu)_n} \frac{(1+s\nu)}{(sn-n)!} z^{sn-n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-y}\, {}_sF_s \left[\left(\frac{-sn+n+i-1}{s}\right)_{i=1}^{s} ; \tfrac{1}{2}, \left(\frac{-sn-s\nu+i}{s}\right)_{i=1}^{s-1} ; z^{-s} y \right] dy.$$

9. सम्बद्ध फल

$$C_{n,s}^{\nu}(z) = \rho^n C_{n,s}(\rho z) \qquad (9·1)$$

जिसमें ρ इकाई का कोई s वाँ घात है और $(s\nu)$ धनपूर्णांक है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध पत्र की तैयारी में डा० बृजमोहन ने जो मार्गदर्शन किया उसके लिए लेखक उनका आभारी है

निर्देश

1. रेनविले, ई० डी०। Special Functions, **पृ.** 358, **समीकरण** (i) $\alpha=\beta=\nu$ **के लिए।**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 3, July 1969, Pages 133-137

गास का हाइपरज्यामितीय फलन - भाग 3

के० सी० गुप्ता
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर
तथा
एस० एस० मित्तल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—फरवरी 2, 1969]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य किसी समाकल परिवर्त के लिए जिसका न्यष्टि गास का हाइपरज्यामितीय फलन हो, दो रोचक प्रमेय स्थापित करना है।

Abstract

On Gauss's hypergeometric transform-III. *By* K.C. Gupta, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur and S. S. Mittal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The aim of this paper is to establish two interesting theorems for an integral transform whose kernel is Gauss's hypergeometric function.

1. विषय प्रवेश : इधर राजेन्द स्वरूप [4, p. 107] ने गास के हाइपरज्यामितीय फलन परिवर्त के लिए एक व्युत्क्रम सूत्र एवं अद्वितीय प्रमेय प्राप्त किया है जो निम्न प्रकार है

$$G\left\{f(x)\,;\,k,\,r;\,\eta;\,s\right\}=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(r)}{\Gamma(\eta)}\int_0^\infty F\begin{pmatrix}k,r\\ \eta\end{pmatrix};-\frac{x}{s}\Big)f(x)\,dx \qquad (1\cdot1)$$

इस शोध पत्र का उद्देश्य गास हाइपरज्यामितीय फलनों के परिवर्त के लिए, जो (1·1) द्वारा पारिभाषित है, दो रोचक प्रमेय स्थापित करना है।

2. **H-फलन :** फाक्स [2, p. 408] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्नांकित प्रकार से पारिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\middle|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\xi)\prod_{j=1}^{n}(1-a_j+\alpha_j\xi)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi)}\, x^{\xi}\, d\xi \tag{2·1}$$

जहाँ x शून्य के तुल्य नहीं है और रिक्त गुणनफलन की विवेचना इकाई के रूप में की जाती है; p, q, m, n ऐसी पूर्ण संख्यायें हैं जो तुष्ट करती हैं $|\leqslant m\leqslant q : 0\leqslant n\leqslant p$; $\alpha_j(j=1, ..., p)$; $\beta_j(j=1, 2, ..., q)$ ऐसी सम्मिश्र संख्यायें हैं कि $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)$ $(h=1, 2, ..., m)$, के कोई भी पोल $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)$ $(i=1, 2, ..., n)$ के पोल से एक स्थान पर नहीं मिलते।

यही नहीं, कंटूर L $\sigma-i\infty$ से $\sigma-i\infty$ तक फैला रहता है जिससे कि $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)$ के पोल L के दाहिनी ओर और $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)$ के पोल बाईं ओर अवस्थित रहते हैं।

H-फलन के लिये उपयोगी प्रसार : ब्राक्समा[1] के शोध पत्र के समीकरण (6·5) से

$$H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\sigma}\middle|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right]=O(|x|^{\alpha\sigma}) \text{ लघु के } x \text{ लिये}$$

जहाँ $$\alpha=\min R\left(\frac{b_h}{\beta_h}\right)\ (h=1, 2, ..., m)$$

और x के दीर्घ मानों के लिए भी

$$H_{p,q}^{m,n}\left[zx^{\sigma}\middle|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right]=O(|x|^{\sigma\beta})$$

जहाँ $$\beta=\max\frac{a_{h-1}}{\alpha_h}\ (h-1, 2, ..., n)$$

जब प्राचल वैधता के निम्नांकित प्रतिबन्धों की तुष्टि करते हैं :

(i) $$\lambda=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j-\sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j+\sum_{j=1}^{m}\beta_j-\sum_{j=m+1}^{q}\beta_j>0$$

तथा (ii) $$|\arg z|<\tfrac{1}{2}\lambda\pi.$$

3. निम्नांकित फलों[3] को आगे की विवेचना में प्रयुक्त किया जावेगा :

(i) $$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,G\left\{x^{l}\,F\begin{pmatrix}a,b\\c\end{pmatrix};-\frac{x^{\sigma}}{a'}\right); k,\ r;\ \eta;\ s\right\}$$

$$=s^{l}\,H^{3,\,3}_{4,\,4}\left[\frac{s^{\sigma}}{a'}\middle|\begin{matrix}(1-a,\ 1),\ (1-b,\ 1),\ (-l,\ \sigma),\ (\eta-l-1,\ \sigma)\\(0,1),\ (k-l-1,\ \sigma),\ (r-l-1,\ \sigma),\ (1-c,1)\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

यदि $R(l+1)>0;\ R(l+1-\sigma_i-j)<0\ \ (i=a,\ b\ ;\ j=k,\ r);\ \sigma>0;\ |\arg a'|<\pi$ तथा $|\arg s|<\pi$.

(ii) $$G\left\{x^{l}\,H^{2,\,2}_{4,\,4}\left[\frac{1}{a'}\,x^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(1-a,\ 1),\ (1-b,\ 1),\ (k-l,\ \sigma),\ (r-l,\ \sigma)\\ \eta-l,\ \sigma),\ (0,\ 1),\ (1-c,\ 1),\ (1-l,\ \sigma)\end{matrix}\right]k,\ r;\ \eta:\ s\right\}$$

$$=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,s^{l}\ F\begin{pmatrix}a,\ b\\c\end{pmatrix};-\frac{s^{-\sigma}}{a'}\right) \tag{3·2}$$

यदि $R(l+1+\sigma a)>0;\ R(l+1+\sigma b)>0.\ \ 0<\sigma<1;\ \ R(l+1-k)<0,\ \ R(l+1-r)<0;$ $R(2l-\eta+1-k)<0$ तथा $R(2l-\eta+1-r)<0.$

आगे $\phi(x)\epsilon A(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ द्वारा हम यह समझेंगे कि $\phi(x)$ शतत है या खंडशः शतत है तथा

$\phi(x)=0(x^{\alpha})$ लघु x के लिए

तथा $\phi(x)=0(x^{\beta}\,e^{\gamma x})$ दीर्घ x के लिए

प्रमेय 1.

यदि $$G\{\phi(x);\ k,\ r;\ \eta;\ s\}=s^{\rho}\,f(s^{\sigma}) \tag{3·3}$$

तथा $$G\left\{x^{\left(\frac{1+\rho}{\sigma}-1\right)}{}_{f(x)}\ ;\ a,\ b;\ c;\ s\right\}=h(s)$$

तो $$h(s)=\sigma\int_{0}^{\infty}\phi(x)\,x^{l-1}\,H^{3,\,3}_{4,\,4}\left[\frac{x^{\sigma}}{s}\middle|\begin{matrix}(1-a,\ 1),\ (1-b,\ 1),\ (-l,\ \sigma),\ (\eta-l-1,\ \sigma)\\(0,\ 1),\ (k-l-1,\ \sigma),\ (r-l-1,\ \sigma),\ (1-c,\ 1)\end{matrix}\right]dx \tag{3·4}$$

जहाँ $\phi(x)\in A(\alpha,\ \beta,\ \gamma),\ \ \ R(\gamma)\leq 0,\ \ \sigma>0,\ \ |\arg s|<\pi,\ \ \ R(l+1)>0,\ \ \ R\ \beta+1)<0,$ $R(\alpha)>\max.(1-k,\ 1-r,\ -1,\ -l),\ \ R(l-1-\sigma i)<0$ तथा $R(\beta+l-\sigma i)<0\ \ (i=a,\ b).$

उपपत्ति : गोल्डस्टीन प्रमेय [4, p. 107] के सम्प्रयोग से, जिसका कथन है कि यदि

$$\psi_1(p; \lambda, \mu, \nu) = G\{f_1(t); \lambda, \mu; \nu; s\}$$

तथा

$$\psi_2(p; \lambda, \mu, \nu) = G\{f_2(t); \lambda, \mu; \nu, s\}$$

तो

$$\int_0^\infty \frac{1}{t} f_1(t)\, \psi_2\left(\frac{1}{t}; \lambda, \mu; \nu\right) dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_2(t)\, \psi_1\left(\frac{1}{t}; \lambda, \mu; \nu\right) dt \qquad (3\cdot5)$$

यदि $f_1(t)$ तथा $f_2(t) \in L(0, \infty)$ और (3·5) में पुनरावृत्त समाकलों में से एक परम अभिसारी है।

(3·1) तथा (3·3) युग्मों में

$$\int_0^\infty x^{l-1} H_{4,4}^{3,3}\left[\frac{x^\sigma}{a^1}\middle| \begin{matrix}(1-a, 1), (1-b, 1), (1-l, \sigma), (\eta-l-1, \sigma)\\ (0, 1), (k-l-1, \sigma), (r-l-1; \sigma), (1-c, 1)\end{matrix}\right] \phi(x)\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \int_0^\infty x^{l+\rho-1} f(x^\sigma)\, F\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; -\frac{x^\sigma}{a^1}\right) dx \qquad (3\cdot6)$$

(3·6) में a के स्थान पर s रखने से तथा दाहिनी ओर $x^\sigma = v$ करने से थोड़े परिवर्तन के बाद हमें वांछित फल की प्राप्ति होती है।

गोल्डस्टीन प्रमेय के सम्प्रयोग को न्यायसंगत सिद्ध करने के लिए हम देखते हैं कि $\phi(x) \in L(0, \infty)$ यदि $R(\alpha+1)>0$, $R(\gamma)\leqslant 0$ तथा $R(\beta+1)<0$. साथ ही $x^l F\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}; \frac{-x^\sigma}{a^1}\right)$ $\in L(0, \infty)$ यदि $R(l+1)>0$, $R(l+1-\sigma i)<0$ $(i=a, b)$, $\sigma>0$ तथा $|\arg a'|<\pi$. अन्त में (3·6) के समाकलों में से एक समाकल परम अभिसारी होगा यदि $R(\alpha+k-1)>0$, $R(\alpha+r-1)>0$ $R(\alpha+l)>0$, $R(\beta+l-\sigma a)<0$, $R(\beta+l-\sigma b)<0$ तथा $R(\gamma)\leqslant 0$। इस प्रकार सभी प्रतिबन्धों के पूरा होने से प्रमेय की उत्पत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय 2 : यदि

$$G\{x^\rho f(x^\sigma); k, v; \eta; s\} = h(s) \qquad (3\cdot7)$$

तथा

$$G\{x^{-(l+\rho+\sigma)/\sigma} f(1/x); a, b; c; s\} = \phi(s)$$

तो

$$\phi(s) = \sigma \int_0^\infty x^{l-1} G_{4,4}^{2,2}\left[\frac{x^{-\sigma}}{s}\middle| \begin{matrix}(1-a, 1), (1-b, 1), (k-l, \sigma), (r-l, \sigma)\\ (\eta-l, \sigma), (0, 1), (1-c, 1), (1-l, \sigma)\end{matrix}\right] h(x)\, dx \qquad (3\cdot8)$$

जहाँ $f(x) \in (\alpha, \beta, \nu)$, $R(\rho+1+\alpha\sigma)>0$ $R(\gamma)\leqslant 0$, $R(\rho+1+\sigma\beta)<0$, $0<\sigma<1$, $R(l+1+\sigma a)>0$, $R(l+1+\sigma b)>0$ $R(l+1)<0$, $R(2l-\eta+1)<0$, तथा $x^{-(l+\rho+\sigma)/\sigma} f(1/x)$ के गास हाइपरज्यामितीय फलन परिवर्त का अस्तित्व है।

उपपत्ति : (3·2) तथा (3·7) में (3·5) का प्रयोग करने से तथा प्रमेय 1 की उपपत्ति–जैसे आगे बढ़ने पर हमें वांछित फल प्राप्त होता है।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे० । **काम्पोस० मैथ०**, 1962, **15**, 239-341.
2. फाक्स, सी० । **ट्रांजै० अमें० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 408.
3. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया) (मुद्रणार्थ प्रेषित).**
4. राजेन्द्र स्वरूप । Annals de la Société Scientifique de Bruxelles, 1964, **278**, 107.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 12 | अक्टूबर 1969 | संख्या 4

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 4, October 1969, Pages 139-144

ग्लूकोस और ग्लूकानिक अम्ल लैक्टोन का पृथक पृथक और मिश्रित आकलन

पी० एस० वर्मा तथा के० सी० ग्रोवर
बी० 2/40 सफदरजंग इन्क्लेव, नई दिल्ली-16

[प्राप्त—अक्टूबर 23, 1969]

सारांश

ग्लूकोस तथा ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के अनुमापनीय विश्लेषण के लिये, चाहे अलग अलग हों, या मिश्रण में हों, हाइपो आयोडाइट तथा पर आयोडेट विधियों के प्रयोग की संस्तुति की गई है। यह देखा गया है कि हाइपोआयोडइट द्वारा ग्लूकोस ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन में परिणत हो जाता है जबकि परआयोडेट ग्लूकोस तथा ग्लूकोनिक अम्ल दोनों ही को फार्मैल्डीहाइड तथा फार्मिक अम्ल में परिणत कर देता है।

Abstract

Estimation of glucose and gluconic acid lactone separately and jointly. *By* P. C. Verma and K. C. Grover, B-2/40, Safderganj Enclave, New Delhi-16.

Hypoiodite and periodate methods have been recommended for the titrimetic analysis of glucose and gluconic acid lactone either singly or in their mixtures. It has been observed that hypoiodite converts glucose into gluconic acid lactone while per-iodate converts both glucose and gluconic acid lactone to formaldehyde and formic acid.

ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के मिश्रण का आकलन जीन कोर-टीइस और एल्फ-विक्ट्राम[1] द्वारा किया गया है। यही विधि ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के मिश्रण को ज्ञात करने के लिये कार्बन-डाइ-अक्साइड निर्धारण द्वारा प्रयोग में लाई जा सकती है।

प्रस्तुत शोध में अनुमापनीय विश्लेषण द्वारा ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के आकलन करने के लिये रासायनिक विवेचन किया गया है और हाइपोआयोडाइट तथा पर-आयोडेट विधियों को प्रयोग में लाने की संस्तुति की गई है। यह ज्ञात हो पाया है कि हाइपो-आयोडाइट रासायनिक क्रिया करके अकेले ग्लूकोस[2] को ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन में परिणत करता है जब कि पर-आयोडेट, ग्लूकोस तथा ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन दोनों को ही फार्मैल्डीहाइड तथा फार्मिक अम्ल में परिणत कर देता है। इसके द्वारा मिश्रण का विश्लेषण सम्भव है।

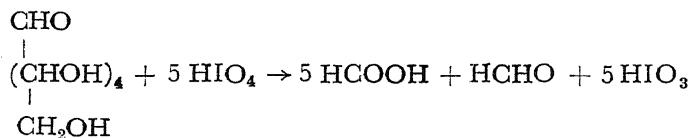
प्रयोगात्मक

सभी रासायनिक पदार्थ, जो प्रयोग में लाये गये, वे बी० डी० एच० अनालार के थे। उनको पुनः शुद्ध करने की आवश्यकता नहीं थी।

15 मिली० प्रामाणिक पर-आयोडेट विलयन (0·05 *N*) शंक्वाकार, बन्द होने वाले फ्लास्क में लिया गया। इसमें 20 मिली० (0·1 *N*) हाइड्राक्साइड मिलाया गया। इससे रासायनिक क्रिया का समय घट कर ग्लूकोस के लिये 15-30 मिनट और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के लिये 2.5 घण्टे हो जाता है (कमरे के ताप तथा पी– एच 12 पर)।

एक निश्चित आयतन, 5 मिली०, 0.05 *N*, ग्लूकोस या ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन को मिलाकर शंक्वाकार फ्लास्क को आवश्यक समय के लिये रख दिया तथा कभी-कभी इसको हिलाया। आवश्यक समय के बाद 25-30 मिली० 40% सल्फ्यूरिक अम्ल, 2-3 बूँदें रुथीनियम क्लोराइड तथा 5-6 बूँदें फेरोइन सूचक की मिलाई गई तथा अनभिक्रत पर-आयोडेट का आकलन मानक 0.05 *N* आर्सेनाइट विलयन से किया गया। नियन्त्रित प्रयोगों को भी अभिकर्मकों की उसी मात्रा के साथ साथ किया गया। दोनों अनुमापों के मानों से जो अभिकर्मक का आयतन ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के आक्सीकरण में प्रयुक्त होता है वह अलग-अलग जाना जा सकता है।

ग्लूकोस का आकलन—मेटा-पर आयोडिक अम्ल द्वारा

$$\begin{array}{l} CHO \\ | \\ (CHOH)_4 + 5\,HIO_4 \rightarrow 5\,HCOOH + HCHO + 5\,HIO_3 \\ | \\ CH_2OH \end{array}$$

500 मिली० (0·05 *N*) तैयार किये हुए विलयन में 0.45045 ग्राम ग्लूकोस है। 0·05*N* मेटा-पर-आयोडिक अम्ल का 1 मिली० = 0.000901 ग्राम ग्लूकोस।

सारणी-1

समय = 15-30 मिनट ताप=कमरे का ताप

क. स.	जितना ग्लूकोस (0.05 *N*) मिलाया गया (मिली०)	जितना पर-आयोडिक अम्ल (0·05 *N*) लिया गया (मिली०)	प्रयुक्त पर-आयोडिक अम्ल (0.05 *N*) (मिली०)	ग्लूकोस की ली गई मात्रा (ग्राम)	ग्लूकोस प्राप्त (ग्राम)
1.	5·00	5·00	5·00	0·004504	0·004504
2.	5·00	10·00	5·01	0·004504	0.004513
3.	5·00	15.00	5·01	0·004504	0·004513
4.	5·00	15·00	5·02	0·004504	0·004522

ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन का आकलन-मेटा-पर-आयोडिक अम्ल द्वारा

$$CH_2OH.\overset{\frown O \frown}{CH.(CHOH)_3CO} + 5HIO_4 \rightarrow 4HCOOH + HCHO + CO_2$$

250 मिली० (0·05 N) तैयार किये हुए विलयन में 0·2227 ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन है।

0·05 N मैटा-पर-आयोडिक अम्ल का 1 मिली० =0.00089 ग्राम ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन।

सारणी-2

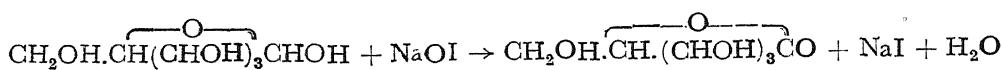
समय = 2·5 घन्टे ताप = कमरे का ताप

क. स.	जितना ग्लूकोनिक अम्ल (0·05 N) लैक्टोन मिलाया गया (मिली०)	जितना पर-आयोडिक अम्ल (0·05N) लिया गया (मिली०)	जितना पर-आयोडिक अम्ल (0.05N) प्रयुक्त हुआ (मिली०)	जितना ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन लिया गया (ग्राम)	जितना ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन प्राप्त हुआ (ग्राम)
1.	5·00	5·00	4·40	0·004450	0·003916
2.	5·00	10·00	4·49	0·004450	0·004441
3.	5·00	15·00	5·02	0·004450	0·004467
4.	5·00	15·00	5·01	0·004450	0·004458

हाइपो-आयोडाइट और पर-आयोडेट विधियों के संयोग द्वारा ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के मिश्रण का विश्लेषण

केवल ग्लूकोस (ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के मिश्रण से) का आकलन हाइपो-आयोडेट विधि द्वारा किया गया जो नीचे दिया गया है।

ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन मिश्रण (जिसका आकलन करना है) को लगभग 0·4 ग्राम पोटैसियम आयोडाइड (जो लगभग 5 मिली० जल में विलयित किया गया) में मिलाया तथा इसके बाद 5·00 मिली० N सल्फ्यूरिक अम्ल तथा 15 मिली० 0·1N पोटैसियम आयोडेट के विलयन डाले गये। 10 मिनट तक रासायनिक क्रिया होने पर जब आयोडीन निकलने लगी तब 7·00 मिली० N सोडियम हाइड्राक्साइड मिलाया गया तथा फ्लास्क को खूब हिलाया गया। फ्लास्क को 15 मिनट के लिये रख छोड़ा गया तथा कभी कभी उसे हिलाया गया। 25 मिली० N सल्फ्यूरिक अम्ल को फ्लास्क में डालकर फ्लास्क को 10 मिनट के लिये रख दिया गया। इस अवधि में अनप्रयुक्त आयोडीन का अनुमापन 0·1Nहाइपो द्वारा कर लिया गया। नियन्त्रित प्रयोगों को भी साथ साथ किया गया। दो अनुमापों का अन्तर उस आयोडीन की मात्रा को दिखाता है जो ग्लूकोस को ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन में बदलती है और आगे क्रिया नहीं करती।

$CH_2OH.\overbrace{CH(CHOH)_3}^{O}CHOH + NaOI \rightarrow CH_2OH.\overbrace{CH.(CHOH)_3}^{O}CO + NaI + H_2O$

100 मिली० तैयार किये हुए विलयन में ·9009 ग्रा० ग्लूकोस।

100 मिली० तैयार विलयन में 0·8907 ग्राम ग्लूकोनिक ग्रम्ल लेक्टोन है। 0·1 N हाइपो-विलयन का 1 मिली०=0.009009 ग्राम ग्लूकोस।

सरणी-3 (ग्र)

क्रम संख्या	जितना ग्लूकोस लिया गया (मिली०)	जितना ग्लूकोनिक ग्रम्ल लैक्टोन लिया गया (मिली०)	जितना हाइपो-ग्रायोडाइट (0·1N) मिलाया गया (मिली०)	हाइपो-ग्रायोडाइट (0·1N) प्रयुक्त (मिली०)	ग्लूकोस की मात्रा (ग्राम)	ग्लूकोस प्राप्त (ग्राम)
1.	1·00	7·00	15·00	1·03	0·009009	0·009279
2.	3·00	5·00	15·00	3·02	0·02702	0·02720
3.	5·00	3.00	15·00	5·02	0·04504	0·04522
4.	7·00	1·00	15·00	7·01	0·06306	0·06315

ऊपर तैयार किये हुए ग्लूकोस और ग्लूकोनिक ग्रम्ल लैक्टोन विलयनों का 10 मिली० ग्रलग-ग्रलग 100 मिली० तक ग्रासुत जल मिला कर तनु किया गया और तनुकृत विलयनों में पर-ग्रायोडेट विधि द्वारा ग्लूकोस और ग्लूकोनिक ग्रम्ल लैक्टोन का ग्राकलन किया गया।

सारणी 3-(ब)

समय=2·5 घन्टे ताप=कमरे का ताप

क्रम संख्या	जितना ग्लूकोस लिया गया (मिली०)	जितना ग्लूकोनिक ग्रम्ल लैक्टोन लिया गया (मिली०)	जितना मेटा-पर ग्रायोडिक ग्रम्ल (0.0N) मिलाया गया (मिली०)	मेटा पर-ग्रयोडिक ग्रम्ल प्रयुक्त (मिली०)	जितना ग्लूकोनिक ग्रम्ल लैक्टोन लिया गया (ग्राम)	जितना ग्लूकोनिक ग्रम्ल लैक्टोन प्राप्त हुग्रा (ग्राम)
1.	1·00	7·00	20·00	8·03	0·006230	0·006230
2.	3·00	5·00	20·00	8·03	0·004450	0·004458
3.	5·00	3·00	20·00	80·2	0·002670	0·002670
4.	7·00	1·00	20·00	8·03	0·000890	0·000909

इस प्रकार यह पाया गया है कि ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन के मिश्रण का रासायनिक विवेचन उपर्युक्त सीमित विधियों के संयोग से सन्तोषप्रद हल देता है जिसका अभी तक कार्बन डाइ-आक्साइड के निर्धारण द्वारा विश्लेषण किया जाता था।

विवेचना

यह दर्शाया जा चुका है कि मेटा पर-आयोडिक अम्ल ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन दोनों के साथ क्रिया करके मात्रात्मकतः फार्मैल्डीहाइड तथा फार्मिक अम्ल में बदल देता है, और इस विलयन अभिकर्मक द्वारा आयतनमितितः आकलन किया जा सकता है। यह पहले से ज्ञात है कि हाइपो-आयोडेट रासायनिक क्रिया द्वारा ग्लूकोस को ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन में परिणत कर देता है जो आगे इस अभिकर्मक के साथ क्रिया नहीं करता है। इसलिये उपर्युक्त दोनों अभिकर्मकों के संयोग द्वारा ग्लूकोस और ग्लूकोनिक अम्ल लैक्टोन का, जब ये एक दूसरे में मिश्रित हों, अनुमापी आकलन किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डा० आर० सी० कपूर, अध्यक्ष, रसायन विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय के हम बहुत आभारी हैं जिन्होंने आवश्यक सुविधाएँ प्रदान कीं।

डा० आर० सी० महरोत्रा, अध्यक्ष, रसायन विभाग, जयपुर विश्वविद्यालय को उनके पथप्रदर्शन के लिए अनेक धन्यवाद, जिन्होंने अपनी योग्य सलाह प्रदान की। एक लेखक, पी० एस० वर्मा, विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का भी आभारी है, जिसने शोध के हेतु अनुदान प्रदान किया।

निर्देश

1. कोरटीयस, जे० तथा एल्फविस्कट्राम। **अन्न० फरैक०** 1949, 7, 288–99; **केमि० ऐब्सट्रैक्ट, 43**, 5339.
2. हिनटन तथा मकेरा। **एनालिस्ट**, 1924, **49**, 2.
3. वर्मा, पी० एस० तथा ग्रोवर, के० सी०। **आस्ट्रे० जर्न० केमि०**, 1968, **21**, 1531-4.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 4 October, 1969, Pages 145-149

प्रभाजी समाकलन आपरेटर पर टिप्पणी

आर० एन० जगेत्या
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—नवम्बर 14, 1967]

सारांश

हाल ही में राठी ने फाक्स के H-फलन सम्बन्धी कतिपय सान्त समाकलों का मान निकाला है। इस टिप्पणी में उनके परिणाम का पुनः लेखन प्रभाजी समाकलन के सक्सेना आपरेटरों की सहायता से किया गया है। परिवर्द्धित रूपों से सक्सेना के शोधपत्र में संग्रहीत परिणामों का सार्वीकरण हो जाता है। राइट के सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन, मैटलैंड के सार्वीकृत बेसेल फलनों तथा सार्वीकृत परावलयिक सिलिंडर फलनों वाली कुछ विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

A note of fractional integration operator (Saxena). *By* R. N. Jagetya, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

Recently Rathie[3] has evaluated certain finite integrals involving H-function of Fox. In this note, his result has been rewritten by making use of Saxena's operators of fractional integration. The modified forms generalize the results listed in Saxena's paper. Some special cases involving Wright's generalised hypergeometric function, Maitland's generalised Bessel functions, and generalised parabolic cylinder functions have been given.

1. **भूमिका** : हाल ही में सक्सेना[4] ने गास के हाइपरज्यामितीय फलन ${}_2F_1$ सम्बन्धी सार्वीकृत प्रभाजी समाकलन आपरेटरों को निम्नांकित रूपों में पारिभाषित किया है।

$$\mathscr{I}[f(x)]=\mathscr{I}[\alpha, \beta, \gamma, m : f(x)]$$

$$=\frac{x^{-\gamma-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\infty}^{x} F(\alpha, \beta+m; \beta, t/x)\, t^{\gamma} f(t)\, dt \tag{1}$$

$$\mathscr{R}[f(x)]=\mathscr{R}[\alpha, \beta ; \delta, m : f(x)]$$

$$=\frac{x^{\delta}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{\infty} F(\alpha, \beta+m ; \beta ; x/t)\, t^{-\delta-1} f(t)\, dt \tag{2}$$

जहाँ $F(a, b; c; x)$ सामान्य हाइपर-ज्यामितीय फलन को सूचित करते हैं तथा a, b, c संकीर्ण प्राचल हैं। ये आपरेटर $Re(1-a)>m$, $Re(\gamma)>-1/q$, $Re(\delta)>-1/p$, $1/p+1/q=1$, $\beta\neq 0, -1, -2, \ldots$ $m=0, 1, 2, \ldots$ के लिये विद्यमान हैं तथा $f(x)\in L_p(0, \infty)$ यह प्रदर्शित करता है कि $\mathcal{I}[f(x)]$ तथा $\mathcal{R}[f(x)]$ दोनों आपरेटर विद्यमान हैं तथा $L_p(0, \infty)$ से सम्बन्धित हैं।

यहाँ $\mathcal{I}$ तथा $\mathcal{R}$ आपरेटर फाक्स के H-फलन के लिये व्यवहृत हैं। माइजर के G-फलन तथा इसकी समस्त विशिष्ट दशाओं से सम्बन्धित परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में निष्पन्न होते हैं। यही नहीं, हमारे परिणामों में विशिष्ट दशा के रूप में मैटलैंड का सार्वीकृत बेसेल फलन $J_{\nu}^{\mu}(x)$, राइट का सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन ${}_pS_q(x)$ इत्यादि [1, p. 241] अन्तर्निहित हैं।

2. हाल ही में राठी द्वारा प्राप्त परिणाम [3, Eq. 1] से प्रारम्भ करते हुये तथा $-\nu-r$ को α, $\mu+1$ को β, $\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\sigma-\frac{3}{4}$ को γ, c_1 को $1+\gamma$, c_q को $\gamma-\beta+2\sin^2\theta$ को x, d_1 तथा d_q को $\frac{1}{2}\delta$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हुये तथा परिणामों को अच्छे रूप में प्राप्त करने की दृष्टि से और कुछ प्राचलों को रखने पर कुछ सरलीकरण के अनन्तर हमें

$$\int_0^1 x^{\gamma}\,{}_2F_1(\alpha, \beta+r; \beta; x)\, H_{q,p}^{n,m}\left[z\, x^{1/2\delta}\left|\begin{matrix}(c_1, d_1), \ldots, (c_q, d_q)\\(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p)\end{matrix}\right.\right] dx$$
$$=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+r)}\, H_{q+2,\, p+2}^{n+1,\, m+1}\left[z\left|\begin{matrix}(-\gamma, \frac{1}{2}\delta), (c_1,d_1), \ldots, c_q, d_q), (\beta-\gamma-1, \frac{1}{2}\delta)\\(\beta+r-\gamma-1, \frac{1}{2}\delta), (a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p), (\alpha-\gamma-1, \frac{1}{2}\delta)\end{matrix}\right.\right] \tag{3}$$

प्राप्त होगा जो $\delta>0$, $Re(\beta)>0$, $Re(1-\alpha-r)>0$, $r=0, 1, 2\ldots$, $Re(\beta-2\gamma-\frac{5}{2}+\delta)\max(c_j-1)/d_j)<0$, $j=1.\ldots m$, $\lambda>0$. $|\arg z|<\frac{1}{2}\lambda\pi$

जहाँ $\lambda\equiv\sum_{j=1}^{m} d_j-\sum_{j=m+1}^{q} d_j+\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{j=n+1}^{p} b_j$ के लिए मान्य है।

(3) तथा (1), (2) के बल पर हमें क्रमश :

$$\mathcal{I}\left[\alpha, \beta, \gamma, r: H_{q,\ p}^{n,\ m}\left(z\, x^{1/2\delta}\left|\begin{matrix}(c_1, d_1), \ldots, (c_q, d_q)\\(a_1, b_1) \ldots, (a_p, b_q)\end{matrix}\right.\right)\right]$$
$$=\frac{1}{(\beta)_r}\, H_{q+2,\ p+2}^{n+1,\ m+1}\left[z\, x^{1/2\delta}\begin{matrix}(1-\gamma, \frac{1}{2}\delta), (c_1, d_1), \ldots, (c_q, d_q), (\beta-\gamma-1, \frac{1}{2}\delta)\\(\beta+r-\gamma-1, \frac{1}{2}\delta)(a_1,b_1), \ldots, (a_p, b_p), (\alpha-\gamma-1, \frac{1}{2}\delta)\end{matrix}\right] \tag{4}$$

$$\mathcal{R}\left[\alpha, \beta, \gamma, r{:}H_{q,\ p}^{n,\ m}\left(z\ x^{1/2\delta}\left|\begin{matrix}(c_1, d_1), \ldots, (c_q, d_q)\\(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p)\end{matrix}\right.\right)\right]$$
$$=\frac{1}{(\beta)_r}\, H_{q+2,\ p+2}^{n+1,\ m+1}\left[z\, x^{1/2\delta}\left|\begin{matrix}(1-\gamma-\beta-r, \frac{1}{2}\delta), (c_1, d_1), \ldots, (c_q,d_q), (1+\gamma-\alpha, \frac{1}{2}\delta)\\(\gamma, \frac{1}{2}\delta), (a_1,b_1), \ldots, (a_p, b_p), (1+\gamma-\beta, \frac{1}{2}\delta)\end{matrix}\right.\right] \tag{5}$$

प्राप्त होंगे जहाँ H-फलन को कुछ भिन्न संकेत के साथ निम्नांकित प्रकार से पारिभाषित किया गया है :-

$$H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,\ \alpha_1),\ \ldots,\ (a_p,\alpha_p)\\(b_1,\ \beta),\ \ldots,\ (b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right.\right]=\frac{t}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(b_i-\beta_i\xi)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)}{\prod_{i=m+1}^{q}\Gamma(1-b_i+\beta_i\xi)\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i-\alpha_i\xi)}x^{\xi}\,d\xi.$$

जहाँ x शून्य के तुल्य नहीं है और रिक्त गुणनफल को 1 के रूप में मान लिया गया है। $p,\ q,\ m,\ n$ ऐसी पूर्णसंख्याएँ हैं कि $1\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant p;\ \alpha_j(j=1,\ldots p),\ \beta_j(j=1,\ldots q)$ धनात्मक पूर्णसंख्याएँ हैं तथा $a_j\ (j=1,\ \ldots p),\ b_j(j=1,\ldots q)$ ऐसी संकीर्ण संख्याएँ हैं कि $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)(h=1,\ldots m)$ का कोई भी पोल $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)(i=1,\ \ldots\ n)$ के किसी भी पोल से संगम नहीं करता अर्थात् $\alpha_i(b_h+\nu)\neq\beta_h(a_i-\eta-1)\ \ (\nu,\ \eta=0,\ 1,\ \ldots;\ h=1,\ \ldots,\ m;\ i=1,\ \ldots,\ n)$ कंटूर $L\ \sigma-i\infty$ से $\sigma+i\infty$ तक प्रसरित है जिससे कि बिन्दु

$$\xi=\frac{b_h+\nu}{\beta_h}\ (h=1,\ \ldots\ m;\ \nu=0,\ 1,\ \ldots)$$

बिन्दु जो $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)$ के पोल हैं दाहिनी ओर पड़ते हैं और

$$\xi=\frac{a_i-\eta-1}{\alpha_i}\ (i=1,\ \ldots\ n;\ \eta=0,\ 1,\ \ldots,)$$

बिन्दु जो $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)$ के पोल हैं वे L के बाईं ओर पड़ते हैं।

(4) तथा (5) परिणामों की महत्ता यह है कि ये परिणाम सामान्य प्रकृति के हैं और ये न केवल सक्सेना के परिणामों [4, p. 291] को समाविष्ट करते हैं वरन् $\mathcal{I}$ तथा $\mathcal{R}$ के मान भी बताते हैं जब $f(x)$ को

(i) राइट के सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन [6, p. 287]

$${}_pS_q(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_js)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\beta_js)}\frac{(-x)^r}{r\,!}\ H_{p,\ q+1}^{1,\ p}\left[x\left|\begin{matrix}(1-a_1,\ \alpha_1),\ \ldots,\ (1-a_p,\alpha_p)\\(0,1),\ (1-b_1,\beta_1),\ \ldots,(1-b_q,\ \beta_q)\end{matrix}\right.\right]\quad(6)$$

(ii) मैटलैंड के सार्वीकृत बेसेल फलन [5, p. 257]

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\mu}\ (x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(1+\nu+\mu r)}=H_{0,\ 2}^{1,\ 0}\left[x\left|(0,\ 1),\ (-\nu,\ \mu)\right.\right]\quad(7)$$

तथा

(iii) सार्वीकृत परावलयिक सिलिंडर फलन [2, p. 150]

$$G_{\lambda}^{\mu}\ (x)=-\frac{\mu}{2\pi i}\int_c \Gamma(-s)\ \Gamma(\mu s+\lambda)\ z^s\ ds,\quad(8)$$

जहाँ $\frac{\lambda}{\mu}$ ऋणात्मक संख्या नहीं है तथा $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}(\mu+1)\pi-\epsilon,\ \epsilon>0$ । इन फलनों को माइजर के G-फलन के रूप में सम्मिलित नहीं किया गया ।

उदाहरण :

(i) यदि (4) तथा (5) में $\delta=2M,\ d_1=\ldots=d_q=b_1=\ldots b_q=1$ रखें तो सक्सेना [4, p. 291) द्वारा उद्धृत शर्मा का परिणाम मिलेगा ।

(ii) यदि (4) तथा (5) में n को 1 द्वारा, m को q द्वारा, p को $p+1$ द्वारा z को 1 द्वारा तथा δ को 2 द्वारा प्रतिस्थापित करें तो

$$\mathscr{I}[\alpha,\beta,\gamma,r:{}_qS_p(x)]=\frac{1}{(\beta)_r}H^{2,\,q+1}_{q+2,\,p+3}\left[x\left|\begin{matrix}(-\gamma,1),(c_1,d_1),\ldots,(c_q,d_q),(\beta-\gamma-1,1)\\(0,1),(\beta+r-\gamma-1,1),(a_1,b_1),\ldots,(a_p,b_p),(\alpha-\gamma-1,1)\end{matrix}\right.\right] \quad (9)$$

$$\mathscr{R}[\alpha,\beta,\gamma,r:{}_qS_p(x)]=\frac{1}{(\beta)_r}H^{2,\,q+1}_{q+2,\,p+3}\left[x\left|\begin{matrix}(1+\gamma-\beta-r,1),\ (c_1,d_1),\ \ldots,\ (c_q,d_q),\ (1+\gamma-\alpha,\ 1)\\(\gamma,1),\ (0,1),\ (a_1,b_1),\ \ldots,\ (a_p,b_p),\ (1+\gamma-\beta,1)\end{matrix}\right.\right] \quad (10)$$

प्राप्त होगा ।

(iii) इसके बाद यदि हम $q=0,\ p=1\ \ a_1=-\nu$ तथा $b_1=\mu$, रखें तो

$$\mathscr{I}\left[\alpha,\beta,\gamma,r:\ \mathcal{J}^{\mu}_{\nu}(x)\right]=\frac{1}{(\beta)_r}H^{2,\,1}_{2,\,4}\left[x\left|\begin{matrix}(-\gamma,1),\ (\beta-\gamma-1,1)\\(\beta+r-\gamma-1,1),(0,1),\ (-\nu,\mu),(\alpha-\gamma-1,1)\end{matrix}\right.\right] \quad (11)$$

$$\mathscr{R}\left[\alpha,\beta,\gamma,r:\mathcal{J}^{\mu}_{\nu}(x)\right]=\frac{1}{(\beta)_r}H^{2,\,1}_{2,\,4}\left[x\left|\begin{matrix}(1+\gamma-\beta-r,\ 1),\ (1+\gamma-\alpha,1)\\(\gamma,1),\ (0,1),\ (-\nu,\mu),\ (1+\gamma-\beta,1)\end{matrix}\right.\right] \quad (12)$$

प्राप्त होगा ।

(iv) यदि हम $q=1$ तथा $p=0$ रखें तथा (ii) में c_1 को $1-\lambda$ द्वारा, d_1 को μ प्रतिस्थापित करें तो

$$\mathscr{I}\left[\alpha,\beta,\gamma,r:G^{\mu}_{\lambda}(x)\right]=-\frac{\mu}{(\beta)_r}H^{2,2}_{3,3}\left[x\left|\begin{matrix}(-\gamma,1),(1-\lambda,\mu),(\beta-\gamma-1,1)\\(0,1),(\beta+r-\gamma-1,1),(\alpha-\gamma-1,1)\end{matrix}\right.\right] \quad (13)$$

$$\mathscr{R}\left[\alpha, \beta, \gamma, r : G_{\lambda}^{\mu}(x)\right] = -\frac{\mu}{(\beta)_r} H_{3,3}^{2,2}\left[x \middle| \begin{matrix}(1+\gamma-\beta-r, 1),(1-\lambda, \mu),(1+\gamma-\alpha, 1)\\(0, 1),(\gamma, 1),(1+\gamma-\beta, 1)\end{matrix}\right] \quad (14)$$

प्राप्त होगा जहाँ ${}_qS_p(x)$, $\mathcal{J}_{\nu}^{\mu}(x)$ तथा $G_{\lambda}^{\mu}(x)$ अनुभाग 2 में दिए हुये हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० पी० एन० राठी का अत्यन्त कृतज्ञ है जिन्होंने इस टिप्पणी के लेखन में मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. ब्राक्स्मा, बी० जे० एल०। Compos. Maths, 1963, **15**, 239-41.
2. गुप्ता, एच० सी०। प्रोसी० नेश० इस्टी० साइंस (इंडिया), 1948, **14**(3), 131-56.
3. राठी, पी० एन०। प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा० 1967, **63**, (प्रकाशनाधीन)।
4. सक्सेना, आर० के०। मैथ० जाइटश्रि०, 1967, **96**, 288-91.
5. राइट, ई० एम०। प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1935, **38**, 257-70.
6. वही। जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1935, **10**, 286-93.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 4, October 1969, Pages 151-156

हाइपरज्यामितीय बहुपदियों पर मेलिन तथा लैपलेस के व्युत्क्रम सूत्रों का सम्प्रयोग

मणिलाल शाह
गणित विभाग, पी० एम० बी० जी० कालेज, इन्दौर,

[प्राप्त—जनवरी 15, 1968]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में मेलिन तथा लैपलेस के व्युत्क्रम सूत्रों का उपयोग करते हुये सार्वीकृत हाइपर-ज्यामितीय बहुपदियों वाले कतिपय समाकलों की प्राप्ति की गई है। हाइपरज्यामितीय बहुपदी सार्वीकृत रूप में रहती है और प्रचलों के विशिष्टीकरण पर कई ज्ञात बहुपदियों के फल प्रदान करती है। इन फलों की विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

On applications of Mellin's and Laplace's inversion formulae to hypergeometric polynomials. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P. M. B. G. College, Indore.

In this paper some integrals involving a generalised hypergeometric polynomial using Mellin's and Laplace's inversion formulae have been obtained. The hypergeometric polynomial is in a generalised form and on specialising the parameters yields results for many known polynomials. Particular cases of the results have also been given.

1. संक्षेपण के लिये तथा लिखने में सरलता की दृष्टि से हम निम्नांकित संकुचित संकेतन का व्यवहार करेंगे:—

$$ {}_pF_q(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \middle| \, x\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_p)_r x^r}{(b_q)_r \, r!} \, . $$

इस प्रकार $(a_p)_r$ की व्याख्या $\prod_{j=1}^{p} (a_j)_r$ के रूप में तथा इसी तरह $(b_q)_r$ की भी व्याख्या की जानी है।

हमने सर्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी [2] को

$$F_n(x)=x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\, a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

$$=x^{(\delta-1)n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r (a_p)_r\,\mu^r x^{cr}}{r!\,(b_q)_r} \tag{1·1}$$

रूप में पारिभाषित किया है जिसमें $\triangle(\delta,-n)$ द्वारा δ प्राचल समूह $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}, \ldots, \frac{-n+\delta-1}{\delta}$, का बोध होता है और δ, n धन पूर्णांक हैं।

2. (1·1) में दोनों ओर $e^{-x}x^{l-1}$ द्वारा गुणा करने, तथा x के सापेक्ष 0 से ∞ तक समाकलित करने, समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदलने पर, जो कि न्यायसिद्ध है हमें (2·1) की प्राप्ति होगी :

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{l+(\delta-1)n-1}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\, a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r (a_p)_r\,\mu^r\,\Gamma\{l+(\delta-1)n+cr\}}{r!\,(b_q)_r}$$

$$Re\ (l)>(1-\delta)n. \tag{2·1}$$

(2.1) में सम्बन्ध $(\alpha)_{nk}=K^{nk}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\alpha-1+i}{K}\right)_n$ का प्रयोग करने पर

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{l+(\delta-1)n-1}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\, a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]dx$$

$$=\Gamma\{l+(\delta-1)n\}\,{}_{p+\delta+c}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ \triangle(c,\, l+(\delta-1)n),\, a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu c^c\right]$$

$$Re\ (l)>(1-\delta)n. \tag{2·2}$$

प्राप्त होगा। (2·2) में मेलिन के व्युत्क्रम सूत्र के सम्प्रयोग से

$$e^{-x}x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\, a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma\{l+(\delta-1)n\}\,{}_{p+\delta+c}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ \triangle(c,\, l+(\delta-1)n,\, a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu c^c\right]x^{-l}\,dl$$

$$Re\ (l)>(1-\delta)n. \tag{2·3}$$

(2·3) **की विशिष्ट दशायें**

$\delta=c=1,\ a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2}$ मान रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{n!}$ से गुणा करने पर

$$e^{-x} f_n^{(\alpha_1\beta)}\begin{pmatrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{pmatrix}; \mu x\Big)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(l) f_n^{(\alpha_1\beta)}\begin{pmatrix}a_2, \ldots, a_p, l \\ b_3, \ldots, b_q\end{pmatrix}; \mu\Big) x^{-l}\, dl$$

$$Re\,(l)>0 \qquad (2·4)$$

जहाँ $f_n^{(\alpha_1\beta)}\begin{pmatrix}a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q\end{pmatrix}; x\Big)$ सार्वीकृत सिस्टर सेलीन का बहुपदी है और $\alpha=\beta=0$ होने पर सिस्टर सेलीन के बहुपदी में घटित हो जाता है।

(2·4) में $\alpha=\beta=0,\ p=2,\ q=3,\ a_2=\frac{1}{2},\ b_3=1$ होने पर

$$e^{-x}Z_n(\mu x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(l)H_n(l, 1, \mu)\, x^{-l}\, dl \qquad Re\,(l)>0 \qquad (2·5)$$

जहाँ $Z_n(x)$ तथा $H_n(\xi, p, x)$ बेटमैन तथा राइस की बहुपदियाँ हैं।

(2 4) में $p=3,\ q=3,\ a_2=\frac{1}{2},\ b_3=\sigma$ तथा $l=\rho$ रखने पर हमें ज्ञात फल [1, p. 159, eqn (3·5)] मिलेगा।

3. (2·1) में $\delta=2,\ c=-2$ रखने पर एवं $\frac{\Gamma(1-\alpha-n)}{\Gamma(1-\alpha)}=\frac{(-1)^n}{(\alpha)_n}$,

$(\alpha)_{2n}=2^{n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n$, सम्बन्धों के प्रयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{l+n-1}\ {}_{p+2}F_q\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, a_p \\ b_q\end{matrix}; \mu x^{-2}\right) dx$$

$$=\Gamma(l+n)\ {}_{p+2}F_{q+2}\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, & a_p \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n, 1-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n, & b_q\end{matrix}; \frac{\mu}{2^2}\right)$$

$$Re\,(l)>-n. \qquad (3·1)$$

प्राप्त होगा। (3·1) में मेलिन के व्युत्क्रम सूत्र के सम्प्रयोग द्वारा

$$e^{-x}x^n\ {}_{p+2}F_q\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, a_p \\ b_q\end{matrix}; \mu x^{-2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(l+n)\ {}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, & a_p \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n, 1-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n, & b_q\end{matrix}; \frac{\mu}{2^2}\right] x^{-l}\, dl$$

$$Re\,(l)>-n. \qquad (3·2)$$

(3·2) **की विशिष्ट दशायें**

(i) $p=1,\ q=2,\ a_1=\gamma-\beta,\ b_1=\gamma,\ b_2=1-\beta-n, \mu=1$ रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{2^n(\beta)_n}{n!}$ से गुणा करने पर

$e^{-x}R_n(\beta, \gamma; x)$

$$=\frac{2^n(\beta)_n}{n!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(l+n)\ {}_3F_4\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \gamma-\beta\\ \gamma,\ 1-\beta-n,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n,\ 1-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n\end{matrix};\ \frac{1}{2^2}\right)x^{-l}\,dl$$

$$Re\ (l)>-n \qquad (3\cdot3)$$

जहाँ $R_n(\beta, \gamma;\ x)$ बेडीण्ट की बहुपदी है।

(ii) $p=q=0,\ \mu=-1$, होने पर तथा दोनों ओर 2^n से गुणा करने पर

$$e^{-x}H_n(x)=2^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(l+n)\ {}_2F_2\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n,\ 1-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}n\end{matrix};\ -\frac{1}{2^2}\right)x^{-l}\,dl$$

$$Re\ (l)>-n \qquad (3\cdot4)$$

जहाँ $H_n(x)$ हरमाइट बहुपदी है।

4. (1.1) में दोनों ओर e^{-sx} से गुणा करने, तथा $(0, \infty)$, क्षेत्र में x के सापेक्ष समाकलित करने, समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदल देने पर जो कि न्यायसिद्ध है हमें

$$\int_0^\infty e^{-sx}x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r\ (a_p)_r\mu^r}{r!\ (b_q)_r S^{(\delta-1)n+cr+1}}\ \Gamma\{(\delta-1)n+cr+1\}$$

$$Re\ (l)>-n. \qquad (4\cdot1)$$

प्राप्त होगा। (4·1) में $(a_{nk})=K^{nk}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a-1+i}{K}\right)_n$ सम्बन्ध का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty e^{-sx}x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_p\\ b_q\end{matrix}:\ \mu x^c\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma\{(\delta-1)n+1\}}{S^{(\delta-1)n+1}}\ {}_{p+\delta+c}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ \triangle(c,\ (\delta-1)n+1),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \frac{\mu c^c}{s^c}\right]$$

$$Re\ (S)>0. \qquad (4\cdot2)$$

(4·2) में लैपलेस के व्युत्क्रम सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left[{\triangle(\delta,\,-n),\,a_p \atop b_q};\ \mu x^c\right]$$

$$=\Gamma\{(\delta-1)n+1\}\frac{1}{2\pi i}$$

$$\times\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{S^{(\delta-1)n+1}}\,{}_{p+\delta+c}F_q\left({\triangle(\delta,\,-n),\ \triangle(c,\,(\delta-1)n+1),\,a_p \atop b_q};\ \frac{\mu c^c}{s^c}\right)e^{xs}\,ds$$

$$Re\ (S)>0. \qquad (4\cdot3)$$

(4·3) **की विशिष्ट दशायें**

$\delta=c=1,\ \ a_1=n+\alpha+\beta+1,\ \ b_1=1+\alpha,\ \ b_2=\frac{1}{2}$ होने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{n!}$ से गुणा करने पर

$$f_n^{(\alpha_1\beta)}\left({a_2,\,\ldots,\,a_p \atop b_3,\,\ldots,\,b_q};\ \mu x\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}S^{-1}f_n^{(\alpha_1\beta)}\left({a_2,\,\ldots,\,a_p,\,1, \atop b_3,\,\ldots,\,b_q};\ \mu s^{-1}\right)c^{xs}\,ds$$

$$Re\ (S)>0. \qquad (4\cdot4)$$

(4·4) में $\alpha=\beta=0,\ p=2,\ q=3,\ a_2=\frac{1}{2},\ b_3=1$ रखने पर

$$Z_n(\mu x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}S^{-1}P_n\left(1-\frac{2\mu}{s}\right)e^{xs}\,ds$$

$$Re\ (S)>0 \qquad (4\cdot5)$$

जहाँ $P_n(x)$ लेगेण्ड्र बहुपदी है।

5. (4·1) में $\delta=2,\ c=-2$ रखने पर तथा $\frac{\Gamma(1-\alpha-n)}{\Gamma(1-\alpha)}=\frac{(-1)^n}{(\alpha)_n}$,

$(\alpha)_{2n}=2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_n$, सम्बन्धों की सहायता से

$$\int_0^\infty e^{-sx}x^n\,{}_{p+2}F_q\left[{-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ a_p \atop b_q};\ \mu x^{-2}\right]dx=\frac{n!}{S^{n+1}}\,{}_pF_q\left({a_p \atop b_q};\ \frac{\mu s^2}{2^2}\right)$$

$$Re\ (S)>0. \qquad (5\cdot1)$$

(5·1) में लैपलेस के व्युत्क्रम सूत्र के सम्प्रयोग से

$$x^n\,{}_{p+2}F_q\left[{-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ a_p \atop b_q};\ \mu x^{-2}\right]=n!\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{S^{n+1}}\,{}_pF_q\left[{a_p \atop b_q};\ \frac{\mu s^2}{2^2}\right]e^{xs}\,ds$$

$$Re\ (S)>0. \qquad (5\cdot2)$$

(5·2) **की विशिष्ट दशायें**

(i) $p=1$, $q=2$, $a_1=\gamma-\beta$, $b_1=\gamma$, $b_2=1-\beta-n$, $\mu=1$ रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{2^n(\beta)_n}{n!}$ से गुणा करने पर

$$R_n(\beta,\gamma;g)=2^n(\beta)_n\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{S^{n+1}}\,{}_1F_2\left({\gamma-\beta \atop \gamma,\ 1-\beta-n};\frac{S^2}{2^2}\right)e^{xs}\,ds$$

$$Re\,(S)>0, \qquad (5\cdot3)$$

(ii) $p=q=0$, $\mu=-1$ तथा $S=2\mu$, होने पर हमें एक ज्ञात फल [3, p. 190, eqn. (2)] की प्राप्ति होती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वी० एम० भिसे को उनके पथ प्रदर्शन एवं डा० एस० एम० दासगुप्ता को आवश्यक सुविधायें प्रदान करने के लिये अपना आभार प्रदर्शित करता है ।

निर्देश

1. खंडेकर, पी० आर० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1964, **34**, 157-62

2. शाह, मणिलाल । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया) में प्रकाशनार्थ प्रेषित**

3. रेनविले, ई० डी० । Special Functions. **न्यूयार्क**, 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 12, No 4, October 1969, Pages 157-166

समाकल परिवर्त-2

टी० एन० श्रीवास्तव
गणित विभाग, लायोला कालेज, माण्ट्रियल, कनाडा

[प्राप्त-फरवरी 10,1969]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य बेसेल तथा G-फलनों के गुणनफल का व्युत्क्रम स्टाइल्जे परिवर्त प्राप्त करना एवं इन्हीं फलनों के गुणनफल वाले अनन्त समाकल का मान माइजर बेसेल परिवर्त तथा स्टाइल्जे परिवर्त से सम्बन्धित प्रमेयों के आधार पर ज्ञात करना है।

Abstract

On an integral transform II. *By* T. N. Srivastava, Department of Mathematics, Loyola College, Montreal, Canada.

The object of the present paper is to obtain the inverse Stieltje's transform of the product of Bessel and *G*-functions of different arguments and to evaluate an infinite integral involving the product of Bessel and *G*-functions of different arguments with the help of the theorms concerning Meijer Bessel transform and the Stieltje's transform.

1. निम्नांकित सांकेतिक प्रतीकों

$$\phi(p) \doteq f(t),\ \phi(p) \underset{\nu}{\overset{k}{=}} f(t) \text{ तथा } \phi(pt) \underset{1}{\overset{s}{=}} f(t)$$

का प्रयोग क्रमशः सर्वमान्य लैप्लास परिवर्त

$$\phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad Re\, p > 0 \qquad (1\cdot1)$$

माइजर बेसेल परिवर्त

$$\phi(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, p \int_0^\infty (pt)^{1/2} k_\nu(pt) f(t)\, dt \qquad Re\, p > 0 \qquad (1\cdot2)$$

तथा स्टाइल्जे परिवर्त

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (p+t)^{-1}f(t)\,dt. \qquad Re\,p>0 \qquad (1\cdot3)$$

के लिये किया जावेगा।

इसके बाद से संकेत $\triangle(a;n)$ द्वारा प्राचलों के समूह $\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}, \ldots, \frac{a+n-1}{n}$ की अभिव्यक्ति तथा $\Gamma(a\pm b)$ द्वारा गुणनफल $\Gamma(a+b)\,\Gamma(a-b)$ की अभिव्यक्ति की जावेगी।

आगे के परिणामों में निम्नांकित फल उपयोगी सिद्ध होंगे :—

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}k_\nu(pt)\,G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(zt^{2\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)dt$$
$$=2^{\sigma-2}p^{-\sigma}s^{\sigma-1}(2\pi)^{1-s}G^{\alpha,\,\beta+2s}_{\gamma+2s,\,\delta}\left(\frac{z(2s)^{2s}}{p^{2s}}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(-\frac{1}{2}\sigma\pm\frac{1}{2}\nu;\ s),\ a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right) \qquad (1\cdot4)$$

जहाँ $Re\,(\sigma+\nu\pm\nu+2sb_j)>0$ यदि $j=1\ldots\alpha$, $Re(p)>0$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta$ तथा $|\arg z|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta)\pi$.

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}J_\nu(pt)\,G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(zt^{2s}\,\middle|\,\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)dt$$
$$=(2s)^{\sigma-1}p^{-\sigma}\,G^{\alpha,\,\beta+s}_{\gamma+2s,\,\delta}\left(\frac{z(2s)^{2s}}{p^{2s}}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle(1-\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\nu;\ s),\ a_1\ldots a_\gamma,\ \triangle(1-\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\nu;\ s)\\ b_1\ldots b\delta\end{matrix}\right) \qquad (1\cdot5)$$

जहाँ $Re\,(\sigma+2sb_j)>0$ यदि $j=1\ldots\alpha$, $p>0$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta$, $Re\,(\sigma+2sa_j)<\frac{3}{2}+2s$ यदि $j=1\ldots\beta$ तथा $|\arg z|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta)\pi$

तथा

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}\,Y_\nu(pt)\,G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(zt^{2s}\,\middle|\,\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)dt$$
$$=(2s)^{\sigma-1}p^{-\sigma}\,G^{\alpha,\,\beta+2s}_{\gamma+3s,\,\delta+s}\left(\frac{z(2s)^{2s}}{p^{2s}}\,\middle|\,\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma,\ \triangle(1\pm\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\sigma;\ s),\ \triangle(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\sigma;\ s)\\ b_1\ldots b_\delta,\ \triangle(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\sigma;\ s)\end{matrix}\right) \qquad (1\cdot6)$$

जहाँ $Re\,(\sigma\pm\nu+sb_j)>0$ जब $j=1\ldots\ldots\alpha$, $p>0$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta$, $Re\,(\sigma+2sa_j)<\frac{3}{2}+2s$ जब $j=1\ldots\ldots\beta$ तथा $|\arg z|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta)\pi$

फल (1·4), (1·5) तथा (1·6) सक्सेना के सूत्र [7, p 401 (8)] का अनुगमन करते हैं।

2. **प्रमेय** (2·1) : यदि

$$\phi(p)\ \underset{\nu}{\overset{k}{=}}\ f(t) \qquad (2\cdot1)$$

तथा

$$\left(\frac{2X}{\pi}\right)^{1/2} [h(p)]^{3/2}\psi(p)k_1[xh(p)] \frac{s}{1} g(x, t) \tag{2·2}$$

तो

$$\psi(p)\,\phi[h(p)] \frac{s}{1} \int_0^\infty f(x)\,g(x, t)\;dX. \tag{2·3}$$

यदि $Re\,[h(p)]>0$, $\psi(p)$ तथा $h(p)$ p के संतत फलन हैं जो x से स्वतन्त्र हैं और (2·1) (2·2) तथा (2·3) के समाकलों का अस्तित्व है।

उपपत्ति : परिभाषा के आधार पर

$$\psi(p)\,\phi[h(p)]=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \psi(p)h(p) \int_0^\infty [xh(p)]^{1/2}K_\nu[xh(p)]\,f(X)\;dX \tag{2·4}$$

(2·2) के प्रयोग से उपर्युक्त समीकरण

$$\psi(p)\,\phi[h(p)]=\int_0^\infty \left[p\int_0^\infty (p+t)^{-1}\,g(X, t)\;dt\right] f(X)\;dX. \tag{2·5}$$

में घटित हो जावेगा। अब (2·5) में समाकलन-क्रम को बदल देने पर तुरन्त फल की प्राप्ति हो जावेगी।

उपर्युक्त प्रमेय में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (2·5) में समाकलन के क्रम को द ला वाली पूसिन प्रमेय [2, p 504] के आधार पर परिवर्तित करना न्यायसंगत है। इसी प्रकार की एक प्रमेय माइजर वेसेल परिवर्त के लिए राठी ने [6, p 367] दी है।

प्रमेय (2·2) : यदि

$$\psi(p) \frac{s}{1} f(t^{1/2}) \tag{2·6}$$

तथा

$$\phi(p) \frac{k}{\nu}\; t^{\nu-\mu+1/2}\, I_\mu(at)\,f(t) \tag{2·7}$$

तो

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{p}{2}\right)^{3/2} \int_0^\infty t^{(\nu-\mu)/2-1}\mathcal{J}_\mu(at^{1/2})\mathcal{J}_\nu(pt^{1/2})\,\psi(t)\;dt. \tag{2·8}$$

यदि $o<a<p$, $2+Re\,\mu>Re\,\nu>-1$ तथा (2·6) एवं (2·7) में निहित समाकलों का अस्तित्व हो।

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि [4, pp 227 (24)]

$$2p^{(\nu-\mu)/2+1}I_\mu(ap^{1/2})K_\nu(bp^{1/2}) \frac{s}{1}\; t^{(\nu-\mu)/2}\mathcal{J}_\mu(at^{\frac{1}{2}})\mathcal{J}_\nu(bt^{1/2}) \tag{2·9}$$

जहाँ $o<a<b,\;2+Re\,\mu>Re\,\nu>-1.$

(2·7) से यह निकलता है कि

$$\phi(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}p\int_0^\infty (pt)^{1/2}K_\nu(pt)\,t^{\nu-\mu+1/2}I_\mu(at)f(t)\,dt \tag{2·10}$$

(2·10) के समाकल में (2·9) से $t^{\nu-\mu+1/2}I_\mu(at)K_\nu(pt)$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें कुछ सरलीकरण के पश्चात्

$$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{p}{2}\right)^{3/2}\int_0^\infty t\,f(t)\,dt\int_0^\infty (t^2+X^2)^{-1}x^{(\nu-\mu)/2}\mathcal{J}_\mu(aX^{1/2})\mathcal{J}_\nu(pX^{1/2})\,dX \tag{2·11}$$

(2·11) में समाकलन क्रम को बदल देने पर निम्न फल प्राप्त होता है :—

$$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{p}{2}\right)^{3/2}\int_0^\infty x^{\nu+\mu/2}\mathcal{J}_\mu(aX^{1/2})\mathcal{J}_\nu(pX^{1/2})\,dX.\int_0^\infty t\,(t^2+X^2)^{-1}f(t)\,dt \tag{2·12}$$

(2·12) में (2·6) को प्रयुक्त करने पर फल (2·8) की तुरन्त प्राप्ति होती है।

प्रमेय में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (2·11) में समाकल के क्रम का परिवर्तन द ला पूसिन प्रमेय [2. pp 504] के द्वारा न्यायसंगत है।

3. **सम्प्रयोग** : इस अनुभाग में प्रमेय (2·1) तथा (2·2) के सम्प्रयोगों को उदाहरणों के रूप में प्राप्त किया जावेगा।

उदाहरण 3·1 : माना कि प्रमेय (2·1) में

$$f(x)=G^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta}\left(\mathcal{Z}X^{2s}\middle|\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right) \tag{3·1}$$

जहाँ s धन पूर्णांक है। (1·4) का प्रयोग करने पर

$$\phi(p)=\left(\frac{s}{\pi}\right)^{1/2}(s\pi)^{1-s}\,G^{\alpha,\beta+2s}_{\gamma+2s,\delta}\left[\frac{\mathcal{Z}(2s)^{2s}}{p^{2s}}\middle|\begin{matrix}\triangle(\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\nu;\,s),\ a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right] \tag{3·2}$$

अब

$$\psi(p)=-2p^{\lambda-3/4}(p-c)^{-\mu/2}I_\mu[b(p-c)^{1/2}] \tag{3·3}$$

$$h(p)=p^{1/2} \tag{3·4}$$

को लेकर [4. pp 229 (35)] का सम्प्रयोग करने पर

$$g(X,t)=\left(\frac{2X}{\pi}\right)^{1/2}t^{\lambda-1}(b+c)^{-\mu/2}\mathcal{J}_\nu[b(t+c)^{1/2}] \tag{3·5}$$

$$\times\left\{\cos\left[\left(\lambda-\frac{\nu}{2}\right)\pi\right].\mathcal{J}_\nu(x\sqrt{t})+\sin\left[\left(\lambda-\frac{\nu}{2}\right)\pi\right]Y_\nu(x\sqrt{t})\right\}.$$

जहाँ $x>b>0$, $|Re(\nu)|<Re(\lambda)<4+Re(\mu)$.

(1·5) तथा (1·6) से यह अनुगमन होता है कि

$$\int_3^\infty f(X)\, g(x, t)\, dX = (2s)^{1/2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} t^{\lambda-7/4}\,(t+c)^{-\mu/2}\mathcal{J}_\mu[b(t+c)^{1/2}].$$

$$\times\left[\cos\left[\left(\lambda-\frac{\nu}{2}\right)\pi\right] G^{\alpha,\,\beta+s}_{\gamma+2s,\,\delta}\left(\frac{\mathcal{Z}(2s)^{2s}}{t^s}\,\middle|\, \begin{matrix}\triangle(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu;\, s),\, a_1\ldots a_\gamma\, \triangle(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\nu;\, s)\\ b_2\ldots b_\delta\end{matrix}\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left[\left(\lambda-\frac{\nu}{2}\right)\pi\right] G^{\alpha,\,\beta+2s}_{\gamma+3s,\,\delta}\left(\frac{\mathcal{Z}(2s)^{2s}}{t^s}\,\middle|\, \begin{matrix}\triangle(\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\nu;\, s),\, a_1\ldots a_\gamma,\, \triangle(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu;\, s)\\ b_1\ldots b_\delta,\, \triangle(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu;\, s)\end{matrix}\right)\right] \quad (3\cdot6)$$

(3·3), (3·2) तथा (3·5) के सम्प्रयोग द्वारा इसकी पुष्टि सरलतापूर्वक की जा सकती है।

$$\psi(p)\phi[h(p)] = -2\left(\frac{s}{\pi}\right)^{1/2} p^{\lambda-3/4}\,\frac{(2\pi)^{1-s}}{(p-c)^{\mu/2}}$$

$$\times I_\mu[b(p-c)^{1/2}]\, G^{\alpha,\,\beta+2s}_{\gamma+2s,\,\delta}\left(\frac{\mathcal{Z}(2s)^{2s}}{p^s}\,\middle|\, \begin{matrix}\triangle(\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\nu;\, s),\, a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right) \quad (3\cdot7)$$

(2·3) का (3·6) तथा (3·7) में प्रयोग करने, प्राचलों में आवश्यक परिवर्तन करने तथा G-फलन के गुणों [3. pp 209, (7) & (9)] का प्रयोग करने पर यह देखा जाता है कि

$$-p^{\lambda-3/4}(2\pi)^{1-s} I_\mu[b(p-c)^{1/2}]\, G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(ap^s\,\middle|\, \begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)$$

$$\frac{s}{1}\, t^{\lambda-7/4}(t+c)^{-\mu/2}\mathcal{J}_\mu[b(t+c)^{1/2}]$$

$$\times\left\{\cos\left[\left(\lambda-\frac{\nu}{2}\right)\pi\right] G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma+s,\,\delta+s}\left(at^s\,\middle|\, \begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma,\, \triangle(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\nu;\, s)\\ b_1\ldots b_\delta,\, \triangle(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\nu,\, s)\end{matrix}\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left[\left(\lambda-\frac{\nu}{2}\right)\pi\right] G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma+s,\,\delta+s}\left(at^s\,\middle|\, \begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma,\, \triangle(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu;\, s)\\ b_1\ldots b_\delta,\, \triangle(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\nu;\, s)\end{matrix}\right)\right\} \quad (3\cdot8)$$

जहाँ $Re\,(\lambda+sb_j)>\frac{3}{4}$ यदि $j=1\ldots\alpha$, $|\arg p|<\pi$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\delta+s$, $Re\,(\lambda+sa_j-\mu/2)<\frac{5}{4}+s$ यदि $j=1\ldots p$, $|\arg a|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta-s)\,\pi$

यदि हम (3·8) में $s=1$, $\lambda=\frac{1}{2}\nu+1$ रखें तो हमें निम्नांकित रोचक फल प्राप्त होगा:—

$$p^{\nu/2+1/4}(p-c)^{-\mu/2} I_\mu[b(p-c)^{1/2}]\, G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(ap\,\middle|\, \begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)$$

$$\frac{s}{1}\, t^{\nu/2+1/4}(t+c)^{-\mu/2}\mathcal{J}_\mu[b(t+c)^{1/2}]\, G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma+1,\,\delta+1}\left(at\,\middle|\, \begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma,\, \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\nu\\ b_1\ldots b_\delta,\, \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right) \quad (3\cdot9)$$

जहाँ $Re\,(\frac{1}{2}\nu+b_j)>-\frac{1}{4}$ यदि $j=1\ldots\alpha$, $|\arg p|<\pi$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta+1$, $Re\,(\frac{1}{2}\nu+a_j-\frac{1}{2}\mu)<\frac{5}{4}$ यदि j $1\ldots\beta$. तथा $|\arg a|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta-1)\pi$.

∵ $b\to 0$ अतः फल (3·9) एक ज्ञात फल [4, pp, 232 (55)] में घटित हो जाता है।

उदाहरण 3·2: माना कि प्रमेय (2·2) में

$$f(t^{1/2})=t^{\sigma/2}\,G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(\frac{ct^n}{(2n)^{2n}}\middle|\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right) \tag{3·10}$$

जिसमें n धन पूर्णांक है। अब (2·6) में सक्सेना के सूत्र [8, pp 341, (10)] का व्यवहार करने से

$$\psi(p)=\frac{p^{\sigma/2+1}}{(2\pi)^{n-1}}\,G^{\alpha+n,\;\beta+n}_{\gamma+n,\;\delta+n}\left(\frac{cp^n}{(2n)^{2n}}\middle|\begin{matrix}\triangle(-\frac{1}{2}\sigma;\,n);\;a_1\ldots a_\gamma\\ \triangle(-\frac{1}{2}\sigma;\,n),\;b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right) \tag{3·11}$$

जहाँ $Re\,(1+\frac{1}{2}\sigma+nb_j)>0$ जब $j=1\ldots\alpha$, $Re\,(\frac{1}{2}\sigma+na_i)<n$ जब $j=1\ldots\beta$ $|\arg p|<\pi$, $|\arg c|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta)\pi$ तथा $\alpha+\beta>\frac{1}{2}(\gamma+\delta)$

अब (2·7) तथा (3·10) से यह निकलता है कि

$$\phi(p)\;\underset{\nu}{\overset{k}{=}}\;t^{\nu-\mu+1/2}.\;I_\mu\,(at)f(t) \tag{3·12}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,p^{3/2}\int_0^\infty t^{\nu-\mu+\sigma+1}K_\nu\,(pt)\,I_\mu\,(at)\,G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(\frac{ct^{2n}}{[2n]^{2n}}\middle|\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)dt,$$

$$\because\quad [4,\text{ pp } 427]\;\;I_\mu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\mu+2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)} \tag{3·13}$$

अतः (3·12) बदलकर

$$\psi(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,p^{3/2}\int_0^\infty t^{\nu-\mu+\sigma+1}K_\nu\,(pt)$$

$$\times\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(at/2)^{\mu+2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}\right).\;G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(\frac{ct^{2n}}{[2n]^{2n}}\middle|\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)dt. \tag{3·14}$$

हो जाता है। (3·14) में समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर

$$\phi(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,p^{3/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a/2)^{\mu+2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1}\int_0^\pi t^{\nu+2m+\sigma+1}$$

$$\times K_\nu\,(pt)\;\;G^{\alpha,\,\beta}_{\gamma,\,\delta}\left(\frac{ct^{2n}}{[2n]^{2n}}\middle|\begin{matrix}a_1\ldots a_\gamma\\ b_1\ldots b_\delta\end{matrix}\right)dt \tag{3·15}$$

ज्ञात फल [5, p 49 (3·3)] के द्वारा समाकल (3·15) का मान निकालने पर थोड़े सरलीकरण के अनन्तर हमें

$$\phi(p)=\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2n)^{\nu+2m+\sigma+1}}{(2\pi)^{n-1/2}} \frac{(\frac{1}{2}a)^{\mu+2m} p^{-(\nu+2m+\sigma+1/2)}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)} \tag{3·16}$$

$$\times G^{\alpha,\ \beta+2n}_{\gamma+2n,\ \delta}\left(\frac{c}{p^{2n}}\middle| \begin{matrix} \triangle(-\frac{1}{2}\nu\pm\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\sigma-m;\ n),\ a_1\ldots a_\gamma \\ b_1\ldots b_\delta \end{matrix}\right)$$

प्राप्त होगा जिसमें $[2\min(nb_j)+\nu\pm\nu+\sigma+2]>0$ यदि $j=1\ldots\alpha$, $Re\,p>Re\,a>0$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta+n$ तथा $|\arg c|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta-n)\,\pi$

अब (2·8) में $\phi(p)$ का मान (3·16) से तथा $\psi(t)$ का मान (3·12) से प्रतिस्थापित करने पर और प्राचलों में उपयुक्त परिवर्तन करने पर थोड़े सरलीकरण के पश्चात् हमें महत्वपूर्ण फल

$$\int_0^\infty t^\lambda \mathcal{J}_\mu(at^{1/2})\mathcal{J}_\nu(bt^{1/2})\,G^{\alpha,\ \beta}_{\gamma,\ \delta}\left(ct^n\middle| \begin{matrix} a_1\ldots a_\gamma \\ b_1\ldots b_\delta \end{matrix}\right)dt$$

$$=\frac{2}{b}\cdot\left(\frac{2n}{b}\right)^{2\lambda+\mu+1}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^{\mu}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a_n/b)^{2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}$$

$$\times G^{\alpha,\ \beta+2n}_{\gamma+3n,\ \delta+n}\left(c\left[\frac{2n}{b}\right]^{2n}\middle| \begin{matrix} \triangle(-\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu-m-\lambda;\ n),\ a_1\ldots a_\gamma,\ \triangle(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\lambda;\ n) \\ b_1\ldots b_\delta,\ \triangle(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\lambda;\ n) \end{matrix}\right) \tag{3·17}$$

की प्राप्ति होगी जो $Re\,(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+\lambda+1+\min nb_j)>0$ यदि $j=1\ldots\alpha$; $a,\ b>0$ $Re\,(\lambda+\frac{1}{2}+\max na_j)<0$ यदि $j=1\ldots\beta$, $\alpha+\beta>\frac{1}{2}(\gamma+\delta)$ तथा $|\arg c|<(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\delta)\,\pi$, के लिये वैध होगा।

अब (3·14) में समाकलन तथा संकलन के क्रम को परिवर्तित करना न्यायसंगत मानने के लिये हम देखते हैं कि (i) (3·14) में अनन्त श्रेणी $t\geqslant0$ के लिये परम अभिसारी है, (ii) इस अनन्त श्रेणी का गुणांक t का संतत फलन है यदि $t\geqslant0$ क्योंकि $K_\nu(X)$ तथा $G\left(X\middle|\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\right)$ x के संतत फलन हैं यदि $x\geqslant0$ तथा (iii) फल (3·16) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (3·12) का समाकल जो $\phi(p)$ को पारिभाषित करता है परम अभिसारी है। इस प्रकार $\phi(p)$ का अस्तित्व है जिसके फलस्वरूप (3·16) में अनन्त श्रेणी अभिसारी है। अतः (3·14) में समाकलन एवं संकलन के क्रम में परिवर्तन [2, pp 500, Theorem B] के कारण न्यायसंगत है।

विशिष्ट दशायें

(i) यदि हम (3·17) में $\alpha=1$, $\beta=p$; $\gamma=p$, $\delta=q+1$ तथा $\lambda=k$ रखें तो थोड़ा सरल करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^k \mathcal{J}_\mu(at^{1/2})\mathcal{J}_\nu(bt^{1/2})\, {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1\ldots a_p\\ b_1\ldots b_q\end{matrix};-ct^n\right]$$

$$=\frac{2^{2k+2}a^\mu}{b^{2k+\mu+2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a/b)^{2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu+m+k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-k)\Gamma(1+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+k)}$$

$$\times_{p+2n}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(1+\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu+m+k;\,n)\ a_1\ldots a_p\\ b_1\ldots b_q\end{matrix};c\left(\frac{2n}{b}\right)^{2n}\right].\quad(3{\cdot}18)$$

प्राप्त होगा जिसमें $Re\,(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+k)+1>0$, $Re\,(2k+1+2n\max a_j)<0$ यदि $j=1\ldots p$ तथा $a,\ b>0$.

और यदि $p=0, q=1, b=\rho+1, n=1$ रखें तथा (3·18) में c को $c^2/4$ के द्वारा पुनः स्थापित करें और सम्बन्ध

$${}_0F_1[-;\ \rho+1;\ -\tfrac{1}{4}Z^2]=\left(\frac{Z}{2}\right)^{-\rho}\Gamma(\rho+1)\mathcal{J}_\rho(Z)$$

का प्रयोग करें तो यह बैली के सूत्र[1] में घटित हो जाता है।

किन्तु जब $p=2$, $q=3$, $n=1$, $a_1=\frac{1}{2}(\lambda+\rho+1)$, $a_2=\frac{1}{2}(\lambda+\rho+2)$, $b_1=\lambda+1$, $b_2=\rho+$, $b_3=\lambda+\rho+1$ तथा $c=c^2$ तो सूत्र

$${}_2F_3\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\rho,\ 1+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\rho\\ 1+\lambda,\ 1+\rho,\ 1+\lambda+\rho\end{matrix};\ -Z^2\right]=\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\rho+1)}{(\frac{1}{2}Z)^\lambda}\mathcal{J}_\lambda(Z)\mathcal{J}_\rho(Z)$$

के कारण फल (3·18)

$$\int_0^\infty t^{k-\lambda/2}\mathcal{J}_\mu(at^{l/2})\mathcal{J}_\nu(bt^{1/2})\mathcal{J}_\lambda(ct^{1/2})\mathcal{J}_\rho(ct^{1/2})\,dt \quad(3{\cdot}19)$$

$$=\frac{2^{2k-\lambda-1}a^\mu c^\lambda}{b^{2k+\mu+2}\Gamma(\rho+1)\Gamma(\lambda+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a/b)^{2m}}{m!\,(\mu+m+1)}\cdot\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu+m+k)}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu+k)\Gamma(1+k-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu)}$$

$$\times{}_4F_3\left[\begin{matrix}1+\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu-k,\ \frac{1}{2}(1+\lambda+\rho),\ \frac{1}{2}(2+\lambda+\rho)\\ 1+\lambda,\ 1+\rho,\ 1+\lambda+\rho\end{matrix};\ \frac{4c^2}{b^2}\right].$$

में घटित होता है जिसमें $Re[k+\frac{1}{2}(\mu+\nu+\rho)+1]>0$, $Re\,(k-\frac{1}{2}\lambda)<0$, तथा $a,\ b,\ c>0$

(ii) यदि हम (3·17) में $\alpha=2, \beta=0, \gamma=1, \delta=2, n=1, a_1=l-k+1$, $b_1=l+m+\frac{1}{2}$ और $b_2=l-m+\frac{1}{2}$ रखें और सम्बन्ध

$$Z^{l} e^{\frac{1}{2}Z} W_{k,m}(Z)=G_{12}^{20}\left(Z \middle| \begin{matrix} l-k+1 \\ l\pm m+\frac{1}{2} \end{matrix}\right)$$

का व्यवहार करें तो हमें

$$\int_0^\infty t^{\lambda+l} J_\mu(at^{1/2}) J_\nu(bt^{1/2}) e^{-ct/2} W_{k,m}(ct)\,dt$$

$$=\frac{a^\mu 2^{2\lambda+2}}{c^l b^{2\lambda+\mu+2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a/b)^{2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}\, G_{4,3}^{2,2}\left(\frac{4c}{b^2} \middle| \begin{matrix} \pm\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-m-\lambda,\ l-k+1,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\lambda \\ l\pm m+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\lambda \end{matrix}\right) \tag{3·20}$$

प्राप्त होगा जहाँ $Re\,(\lambda+l+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\pm m+\frac{3}{2})>0$ तथा $a, b, c>0$.

(iii) $\alpha=4, \beta=0, \gamma=2, \delta=4, n=1, a_1=1+k, a_2=1-k, b_1=\frac{1}{2}, b_2=1, b_3=\frac{1}{2}+m$, $b_4=\frac{1}{2}-m$ रखने पर तथा (3·17) में c को $c^2/4$ द्वारा पुनःस्थापित करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^\lambda J_\mu(at^{1/2}) J_\nu(bt^{1/2}) W_{k,m}(ct^{1/2}) W_{-k,m}(ct^{1/2})\,dt$$

$$=\frac{2^{\lambda+2} a^\mu}{\sqrt{\pi}\, b^{2\lambda+\mu+2}} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(a/b)^{2r}}{r!\,\Gamma(\mu+r+1)}\, G_{2,5}^{4,2}\left(\frac{c^2}{b^2} \middle| \begin{matrix} -\frac{1}{2}\mu\pm\frac{1}{2}\nu-\gamma-\lambda,\ 1\pm k,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\lambda \\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\pm m,\ \frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu-\lambda \end{matrix}\right) \tag{3·21}$$

प्राप्त होगा जिसमें $Re\,(\lambda+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\pm\frac{1}{2}m\pm\frac{1}{2}m+\frac{3}{4})>0$ तथा $a, b, c>0$.

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, जोधपुर विश्वविद्यालय के डा० आर० के० सक्सेना का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में अपने सुझावों से प्रेरित किया ।

निर्देश

1. बेली, डब्लू० एन० । **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1936, **11**, 16-40.
2. ब्रामविच, टी० जे० । Infinite Series, **मैकमिलन, लन्दन**, 1908.
3. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcendental Functions, **भाग** I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1953.
4. वही । Tables of Integral Transform, **भाग** II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.

5. गुप्ता, के० सी० । Seminario Mathematico De Barcelona, Mathematica Coolectanea, **भाग** XVI, **खंड** I, 1964.

6. राठी, पी० एन० । **जर्न लन्दन मैथ० सोसा०**, 1590, **40**, 367-69.

7. सक्सेना, आर० के० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० सांइस (इंडिया)**, 1960, **26** (4), 400-413.

8. वही । **वही**, 1959, **25** (6), 340-55.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 12, No. 4, October 1969, Pages 167-177

आत्म व्युत्क्रम फलनों वाले परिमित समाकल

ओ० पी० शर्मा
गणित विभाग, होल्कर सांइस कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—मार्च 25, 1968]

सारांश

इस शोधपत्र में कतिपय प्रमेयों की स्थापना ऐसे वर्ग के फलनों के अनुसन्धान के हेतु की गई है कि यदि सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त में $G(x)x^{-1/2}F(x)$ का व्युत्क्रम हो तो $x^{-1/2}F(1/x)$ अन्य कोटि के उसी परिवर्त में $G(x)$ का व्युत्क्रम होगा। ऐसे फलनों के कुछ गुणों की विवेचना की गई है और अन्त में कतिपय आत्म व्युत्क्रम फलनों को समाकल समीकरणों के हलों के रूप में प्राप्त किया गया है।

Abstract

Definite integrals involving self-reciprocal function. *By* O. P. Sharma, Department of Mathematics, Holkar Science College, Indore.

In this paper, certain theorems have been established to investigate a class of functions such that if $x^{-1/2}F(x)$ is reciprocal of $G(x)$ in the generalised Hankel transform, defined in (1·2), then $x^{-1/2}F(1/x)$ will be reciprocal of $G(x)$ in the same transform of another order. Some properties of such functions have been discussed and finally certain self-reciprocal functions have been obtained as solutions of integral equations.

1. हैंकेल परिवर्त

$$g(x)=\int_0^\infty \sqrt{xy}\, \mathcal{J}_\nu(xy) f(y)\, dy \tag{1·1}$$

के सार्वीकरण का सन्निवेश सममित फूरियर न्यष्टि का प्रयोग करते हुये किया जा सकता है जिसे नारायण [8, p. 951] ने

$$g(x)=2\beta\gamma \int_0^\infty (xy)^{\gamma-1/2} G^{q,p}_{2p,2q}\left[\beta^2(xy)^{2\gamma} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, & -a_1, \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, & -b_1, \ldots, -b_q \end{matrix}\right] f(y)\, dy, \tag{1·2}$$

रूप में दिया है जिसमें β तथा γ वास्तविक अचर हैं।

(1·2) में हम $g(x)$ को $f(x)$ के $G(a_p; b_q)$-परिवर्त के रूप में पुकारेंगे।

(1·2) में $\beta=\frac{1}{2}, \gamma=1, p=0, q=1$, तथा $b_1=\frac{1}{2}\nu$, रखने पर यह (1·1) में घटित हो जाता है।

नारायण द्वारा दिये गये प्रतिस्थापनों [8, p. 957] का प्रयोग करने पर (1·2) का न्यष्टि विशिष्ट दशाओं के रूप में वे विभिन्न न्यष्टियाँ प्रदान करता है जो वाटसन [11, p. 308], भटनागर [1. p. 43], नारायण [6, p. 271] तथा [7, p. 298] एवेरिट [4, p. 271] द्वारा दी गई हैं।

यदि (1.2) में $f(x)\equiv g(x)$, तो हम $f(x)$ को (1·2) में आत्म व्युत्क्रम कहेंगे और इसे सांकेतिक रूप में $R(a_p; b_q)$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

हम यह भी कहेंगे कि $f(x)$ का सम्बन्ध $A(\alpha, a)$ से है जिसमें $0<\alpha\leqslant\pi$, $a<\frac{1}{2}$, यदि (i) यह $x=re^{i\theta}$ का वैश्लेषिक फलन हो जिसका कोण A जो $r>0$, $|\theta|<\alpha$, द्वारा पारिभाषित हो नियमित हो (ii) यह लघु x के लिये $0(|x|^{-a-\epsilon})$ तथा दीर्घ x के लिए $0(|x|^{a-1+\epsilon}$ हो, चाहे कोई धनात्मक ϵ हो और कोई भी कोण $|\theta|\leqslant\alpha-\eta<\alpha$ में शतत हो।

इस शोधपत्र का उद्देश्य ऐसे फलनों की श्रेणी पर अनुसन्धान करना है जो यदि सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त (1·2) में $x^{-1/2}(Fx)$ के $G(x)$ का व्युत्क्रम हो तो $x^{-1/2}F(x^{-1})$ दूसरी कोटि के उसी परिवर्त में $G(x)$ का व्युत्क्रम होगा। ऐसे फलनों की प्रकृति का भी अध्ययन किया गया है और आत्मव्युत्क्रम फलनों वाले निश्चित समाकलों को विशिष्ट प्रकार के सम्बन्ध की तुष्टि करते हुये दिखाया गया है। समाकल समीकरणों के हलों के रूप में भी कतिपय आत्म-व्युत्क्रम फलनों को सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त के व्युत्क्रम सूत्र [5, p. 400] के प्रयोग द्वारा व्युत्पन्न किया गया है।

2. **प्रमेय I** : यदि $f(x)$ $R(a_p; b_q)$ हो अर्थात् समाकल समीकरण

$$f(x)=2\beta\gamma \int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2} G^{q, p}_{2p, 2q} \left[\beta^2(xt)^{2\gamma} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, -a_1, \dots, -a_p \\ b_1, \dots, b_q, -b_1, \dots, -b_q \end{matrix} \right.\right] . f(t)\, dt, \tag{2·1}$$

का हल हो तथा यदि

$$g(x)=\int_a^{1/a} t^{-1/2} F(t) f(xt)\, dt,$$

जिसमें a धनात्मक अथवा शून्य हो तथा $f(t)$ ऐसा कोई फलन हो जिससे कि

$$F(t)=F(1/t),$$

तो $g(x)$ भी $R(a_p; b_q)$ होगा अर्थात समाकल समीकरण (2·1) का हल होगा किन्तु शर्त यह है कि जो भी समाकल सन्निहित हैं वे पूर्णतया तथा एकरूप से अभिसारी हों।

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$2\beta\gamma \int_0^\infty (x)^{\gamma-1/2}\, G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2(xt)^{2\gamma}\,\middle|\,\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1 \ldots, -b_q\end{matrix}\right].\, g(t)\ dt$$

$$=2\beta\gamma \int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2}\, G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2(xt)^{2\gamma}\,\middle|\,\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1, \ldots, -b_q\end{matrix}\right] dt \times \int_a^{1/a} \mu^{-1/2}F(u)f(tu)\ du$$

$$=2\beta\gamma \int_a^{1/a} u^{-1/2}F(u)\ du \int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2}\, G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2(xt)^{2\gamma}\,\middle|\,\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1, \ldots, -b_q\end{matrix}\right] \times f(tu)\,.\ dt$$

$$=2\beta\gamma \int_a^{1/a} \mu^{-3/2}F(u)\ du \int_0^\infty \left(\frac{xt}{u}\right)^{\gamma-1/2} G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2\left(\frac{xt}{u}\right)^{2\gamma}\,\middle|\,\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1, \ldots, -b_q\end{matrix}\right] \times f(t)\ dt$$

$$=\int_a^{1/a} u^{-3/2}F(u)f(x/u)\ du \qquad [\text{क्योंकि } f(x) \text{ तुल्य है } R\,(a_p;\, b_q) \text{ के}]$$

$$=\int_a^{1/a} t^{-1/2}F(1/t)f(xt)\ dt$$

$$=g(x),$$

$$\because \quad F(t)=F(1/t).$$

इसलिये $g(x)$, $R(a_p;\ b_q)$ है।

जब $a=0$, तो उपर्युक्त प्रमेय को ऐसे रूप में व्यक्त किया जा सकता है जिससे कि

$$g(x)=\int_0^\infty (xu)^{-1/2}F(u/x)f(u)\ du,$$

$R(a_p;\, b_q)$ के तुल्य हो। इसका प्रत्यक्ष उदाहरण

$$F(t)=\frac{(e^{\alpha t}+e^{\alpha/t})^{\mu}}{(t^{\alpha}+t^{-\alpha})^{\lambda}}\,,$$

को लेने से प्राप्त होता है जिस दशा में $R(a_p;\ b_q)$ फलन को निम्न रूप में प्राप्त करते हैं

$$\int_0^\infty \frac{(xu)^{\alpha\lambda-1/2}(e^{\alpha u/x}+e^{\alpha x/u})^{\mu}}{(x^{2\alpha}+u^{2\alpha})^{\lambda}}\, f(u)\ du,$$

जिसमें $f(x)$, $R(a_p; b_q)$ है । इसतर्क को $a=0$ रखकर व्यापक बनाया जा सकता है । तब संगत फल निम्नकित होगा :

प्रमेय II : यदि $f(x) R(a_p; b_q)$ हो अर्थात् समाकल समीकरण (2·1) का हल हो तथा $G(x)$ इस प्रकार हो कि

$$x^{-1/2}F(x)=2\beta\gamma\int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2}\, G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2(xt)^{2\gamma}\,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1, \ldots, -b_q \end{matrix}\right] G(t)\, dt$$

तथा

$$x^{-1/2}F(1/x)=2\beta\gamma\int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2}\, G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2(xt)^{2\gamma}\,\middle|\, \begin{matrix} c_1, \ldots, c_p, -c_1, \ldots, c_p \\ d_1, \ldots, d_q, -d_1, \ldots, d_q \end{matrix}\right] G(t)\, dt$$

तो फलन $g(x)$ जिसे

$$g(x)=\int_0^\infty t^{-1/2}F(t)f(xt)\, dt,$$

द्वारा सूचित करते हैं $R(c_p; d_q)$ होगा अर्थात् (2·1) का हल होगा जिसके सभी a तथा सभी b क्रमश: c तथा d द्वारा पुनःस्थापित होंगे जिसमें $(0, \infty)$ में $G(x)$ शतत फलन होगा और लघु मान के लिए $0(x^{\lambda})$ तथा उच्चमान के लिए $0(x^{-\delta})$ होगा । $f(x)$ का सम्बन्ध $A(\alpha, a)$, $Re\ (2\gamma+2\lambda+4\gamma b_h+1>0$ $(h=1, \ldots, q)$, $Re\ (2\gamma+2\delta-4\gamma a_j-1)>0 (j=1, \ldots, p)$ से होगा तथा क्रमश: ऐसी अवस्थायें होंगी जैसी कि a_j तथा b_h को c_j तथा d_h $(j\ h=1, \ldots, p; h=1, \ldots, q)$ द्वारा पुनः स्थापित करने पर।

उपपत्तिः हम जानते हैं कि

$$g(x)=\int_0^\infty t^{-1/2}F(t)\, f(xt)\, dt$$

अथवा

$$g(x)=2\beta\gamma\int_0^\infty f(xt)\, dt\int_0^\infty G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[p^2(tu)^{2\gamma}\,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1, \ldots, -b_q \end{matrix}\right] \times (ut)^{\gamma-1/2}G(u)\, du$$

$$=2\beta\gamma\int_0^\infty G(xu)\, du\int_0^\infty G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2(tu)^{2\gamma}\,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1 \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1, \ldots, -b_q \end{matrix}\right] \times (ut)^{\gamma-1/2}f(xt)\, dt$$

$$=\frac{2\beta\gamma}{x}\int_0^\infty G(u)\, du\int_0^\infty \left(\frac{ut}{x}\right)^{\gamma-1/2} G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[\beta^2\left(\frac{ut}{x}\right)^{2\gamma}\,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, -a_1, \ldots, -a_p \\ b_1, \ldots, b_q, -b_1 \ldots, -b_q \end{matrix}\right] \times f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^\infty G(u) f(u/x)\, du \qquad [\text{क्योंकि } f(x) = R(a_p; b_q)]$$

$$= \int_0^\infty f(u) G(xu)\, du. \tag{2·2}$$

अतः

$$2\beta\gamma \int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2} G_{2p,\,2q}^{q,\,p}\left[\beta^2 (xt)^{2\gamma} \middle| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_p, -c_1, \ldots, -c_p \\ d_1, \ldots, d_q, -d_1, \ldots, -d_q \end{matrix}\right] \cdot g(t)\, dt$$

$$= 2\beta\gamma \int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2} G_{2p,\,2q}^{q,\,p}\left[\beta^2 (xt)^{2\gamma} \middle| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_p, -c_1, \ldots, -c_p \\ d_1, \ldots, d_q, -d_1, \ldots, -d_q \end{matrix}\right] dt$$

$$\times \int_0^\infty f(u) G(t\mu)\, du$$

$$= 2\beta\gamma \int_0^\infty f(u)\, du \int_0^\infty (xt)^{\gamma-1/2} G_{2p,\,2q}^{q,\,p}\left[\beta^2 (xt)^{2\gamma} \middle| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_p, -c_1, \ldots, -c_p \\ d_1, \ldots, d_q, -d_1 \ldots, -d_q \end{matrix}\right]$$

$$\times G(tu)\, dt$$

$$= 2\beta\gamma \int_0^\infty \frac{1}{u} f(u)\, du \int_0^\infty \left(\frac{xt}{u}\right)^{\gamma-1/2} G_{2p,\,2q}^{q,\,p}\left[\beta^2 \left(\frac{xt}{u}\right)^{2\gamma} \middle| \begin{matrix} c_1, \ldots, c_p, -c_1, \ldots, -c_p \\ d_1, \ldots d_q, -d_1, \ldots, -d_q \end{matrix}\right]$$

$$\times G(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty u^{-1} f(u) (x/u)^{-1/2} F(u/x)\, du$$

$$= \int_0^\infty t^{-1/2} f(xt) F(t)\, dt$$

$$= g(x). \tag{2·3}$$

अतः $g(x) = R(c_p; d_q)$.

प्रमेय में कथित दशाओं के अन्तर्गत (2·2) तथा (2.3) के समाकलन क्रमों में परिवर्तन करना द ला वाले पूसिन प्रमेय [3, p. 504] के अनुसार विहित होगा। इससे प्रमेय II की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

तर्क से यह भी निकलता है कि

प्रमेय III : यदि $G(t)$ द्वारा प्रमेय II की शर्तें पूरी हों तो

$$g(x) = \int_0^\infty G(xu) f(u)\, du$$

$R(c_p; d_q)$ होगा।

प्रमेय IV : यदि $f(x)$ बराबर $R(c_p;\, d_q)$ तथा $k(x)$ बराबर $R(a_p;\, b_q)$ तो फलन

$$x^{-1/2}F(x)=\int_0^\infty k(y)\,f(xy)\,dy \tag{2·4}$$

ऐसा होगा कि $x^{-1/2}F(x)$ का $G(c_p;\, d_q)$ परिवर्त $x^{-1/2}F(1/x)$ के $G(a_p;\, b_q)$ परिवर्त के तुल्य होगा ।

उपपत्ति : $\because$ $k(x)$ बराबर है $R(a_p;\, b_q)$ के अत : लेखक[10] की प्रमेय से

$$x^{-1/2}F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(xy)\,dy\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-s/2\gamma}.\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}.\,\psi(s)y^{-s}\,ds$$

प्राप्त होगा जहाँ

$\psi(s)=\psi(1-s)$.

अत :

$$x^{-1/2}F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-s/2\gamma}.\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}.\,\psi(s)\,ds\int_0^\infty f(xy)y^{-s}\,ds.$$

समाकलन के क्रम का विलोमन विहित माना जावेगा यदि $f(x)$ तथा $k(x)$ दोनों $A(\alpha, a)$ से सम्बन्धित हों ।

अतः

$$x^{-1/2}F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-s/2\gamma}.\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}.\,\psi(s)x^{s-1}\,ds$$

$$\times\int_0^\infty \mu^{-s}f(u)\,du.$$

अब $\because$ $f(x)$, $R(c_p;\, d_q)$ के बराबर है अतः

$$f(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty}\beta^{-s/2\gamma}.\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-c_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\,\psi'(s)u^{-s}\,ds.$$

जहाँ

$$\psi'(s)=\psi'(1-s).$$

इसलिये मेलिन के व्युत्क्रम सूत्र द्वारा

$$\int_0^\infty u^{s-1} f(u)\, du=\beta^{-s/2\gamma}.\ \frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-c_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\psi'(s).$$

s को $(1-s)$ द्वारा पुनःस्थापित करने पर

$$\int_0^\infty u^{-s} f(u)\, du=\beta^{s-1/2\gamma}.\ \frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}+d_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}-c_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}\psi'(s).$$

अतः

$$x^{-1/2}F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}-c_j-\frac{s}{2\gamma}\right)}\chi(s)x^{s-1}\, ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-c-i\infty}^{1-c+i\infty}\frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}+b_j-\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{2\gamma+1}{4\gamma}-a_j-\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-c_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}.\ \chi(s)x^{s-1}\, ds \qquad (2\cdot5)$$

जहाँ

$$\chi(s)=\chi(1-s). \qquad (2\cdot6)$$

इस समाकल के रूप से यह प्रदर्शित होता है कि $x^{-1/2}F(x)$ ऐसा फलन है कि $x^{-1/2}F(x)$ का $G(c_p;\, d_q)$ परिवर्त $x^{-1/2}F(1/x)$ के $G(a_p;\, b_q)$ परिवर्त के तुल्य है।

प्रमेय V : यदि $Q(x)=\int_0^\infty \frac{1}{y}k(y)f(x/y)\,dy$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{y}k(x/y)f(y)\,dy,$$

जिसमें $f(x)R(c_p;\ d_q)$ के तथा $k(x)R\,(a_p;\,b_q)$ के बराबर है और दोनों ही $A(\alpha, a)$ से सम्बन्धित हैं तो $Q(x)$ का रूप

$$Q(x)=\frac{1}{2\gamma i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\beta^{-s/\gamma}\,.\,\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+b_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}+d_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-a_j+\frac{s}{2\gamma}\right)\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{4\gamma}-c_j+\frac{s}{2\gamma}\right)}\,\chi(s)x^{-s}\,ds,$$

होगा जहाँ $\chi(s)$ से (2·6) की तुष्टि होगी।

यदि हम प्रमेय IV की भाँति अग्रसर हों तो यह प्रमेय प्राप्त होगी।

यह सरलता से सम्पुष्ट हो सकता है कि $Q(x)$ इस प्रकार का है कि यदि $Q(x)$ का $G(c_p;\,d_q)$ परिवर्त $x^{-1/2}F(x)$ हो तो $Q(x)$ का $G(a_p;\,b_q)$ परिवर्त $x^{-1/2}F(1/x)$ होगा।

2·1. विशिष्ट दशायें

(i) $\beta=\frac{1}{2},\ \gamma=1,\ p=1,\ q=2,\ a_1=k-m-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ b_1=\frac{1}{2}\nu,\ c_1=k-m-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu,$ $d_1=\frac{1}{2}\mu$ तथा $d_2=\frac{1}{2}\mu+2m$ रखने पर प्रमेय 1 से लेकर V तक सक्सेना[9] द्वारा दिये गये संगत फलों में घटित हो जाते हैं।

(ii) $\beta=\frac{1}{2},\ \gamma=1,\ p=0,\ q=1,\ b_1=\frac{1}{2}\nu$ तथा $d_1=\frac{1}{2}\mu$ होने पर प्रमेय IV तथा V से बृजमोहन द्वारा दी गई ज्ञात दशायें [2, p. 164-165] प्राप्त होती हैं।

3. यदि प्रमेय IV के फल में हम $c_j=a_j(j=1,\ldots,p)$ तथा $d_h=b_h(h=1,\ldots,q)$ रखें तो (2·5) के द्वारा हमें

$$x^{-1/2}F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-c-i\infty}^{1\cdot c+i\infty}\lambda(s)x^{-s}\,ds \tag{3·1}$$

प्राप्त होगा जहाँ

$$\lambda(s)=\lambda(1-s). \tag{3·2}$$

फल की सममिति से यह लक्षित होता है कि यदि हम

$$x^{-1/2}F(x)=\int_0^\infty k(xy)f(y)\,dy.$$

रखें तो इसी फल की प्राप्ति होगी। अतः निम्नांकित प्रमेय की पुष्टि होती है जो पार्सेवाल सूत्र की विशिष्ट दशा है :

यदि $f(x)$ तथा $k(x)$, $R(a_p; b_q)$, हों तो

$$\int_0^\infty k(xy)f(y)\,dy=\int_0^\infty k(y)f(xy)\,dy. \tag{3·3}$$

4. यदि $f(x)$ तथा $k(x)$ दोनों ही $R(a_p;\ b_q)$ हों और $A(\alpha,\ a)$ से सम्बद्ध हों तो (3·1), (2·4) तथा (3·3) के द्वारा हमें

$$x^{-1/2}F(x)=\int_0^\infty k(xy)f(y)\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{1\ c-i\infty}^{1\ c+i\infty}\lambda(s)x^{-s}\,ds,$$

प्राप्त होगा जिसमें $\lambda(s)$ द्वारा (3·2) की तुष्टि होती है।

अतः
$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-c-i\infty}^{1-c+i\infty}\lambda(s)x^{1/2-s}.\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\lambda(s)\,x^{s-1/2}\,ds$$

$$=F(1/x).$$

4·1. आत्म व्युत्क्रम फलन

अनुभाग 4 के फल को प्रयुक्त करने पर आत्म व्युत्क्रम फलनों के उदाहरण व्युत्पन्न किये जा सकते हैं अर्थात समाकल समीकरण का हल

$$f(x)=2\beta\gamma\int_0^\infty (xy)^{\gamma-1/2}\,G^{q,\ p}_{2p,2q}\left[\beta^2(xy)^{2\gamma}\left|\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p,\ -a_1,\ \ldots,\ -a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q,\ -b_1,\ \ldots,\ -b_q\end{matrix}\right.\right]f(y)\,dy.$$

(i) माना कि[10]*

$$k(x)=G^{q,\ p}_{2p,\ 2q}\left[4^{p-q}\beta^2x^{4\gamma}\left|\begin{matrix}\left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}+\frac{a_p}{2}\right\},\ \left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}-\frac{a_p}{2}\right\}\\ \left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}+\frac{b_q}{2}\right\},\ \left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}-\frac{b_q}{2}\right\}\end{matrix}\right.\right],$$

संक्षेपण की दृष्टि से $\{\sigma\pm a_p\}$ संकेत द्वारा निम्न प्राचल अंकित होंगे
$(\sigma\pm a_1),\ (\sigma\pm a_2),\ \ldots,\ (\sigma\pm a_p)$.

तो

$$F(x)=\sqrt{x}\int_0^\infty G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[4^{p-q}\beta^2(xy)^{2\gamma}\left|\begin{matrix}\left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}+\frac{a_p}{2}\right\},\ \left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}-\frac{a_p}{2}\right\}\\ \left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}+\frac{b_q}{2}\right\},\ \left\{\frac{2\gamma-1}{8\gamma}-\frac{b_q}{2}\right\}\end{matrix}\right.\right] f(y)\,dy,$$

सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त [5, p. 400] के व्युत्क्रम सूत्र द्वारा समाकल को विलोमित करने पर हमें द्वितीय हल प्राप्त होगा।

(ii) यदि हम [10] को चुनें

$$k(x)=G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[4^{p-q}\beta^2x^{4\gamma}\left|\begin{matrix}\left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}+\frac{a_p}{2}\right\},\ \left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}-\frac{a_p}{2}\right\}\\ \left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}+\frac{b_q}{2}\right\},\ \left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}-\frac{b_q}{2}\right\}\end{matrix}\right.\right],$$

तो

$$F(x)=\sqrt{x}\int_0^\infty G^{q,\,p}_{2p,\,2q}\left[4^{p-q}\beta^2(xy)^{4\gamma}\left|\begin{matrix}\left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}+\frac{a_p}{2}\right\};\ \left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}-\frac{a_p}{2}\right\}\\ \left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}+\frac{b_q}{2}\right\},\ \left\{\frac{6\gamma-1}{8\gamma}-\frac{b_q}{2}\right\}\end{matrix}\right.\right]\cdot f(y)\,dy.$$

पुनः इस समाकल को सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त [5, p. 400] के व्युत्क्रम सूत्र द्वारा विलोमित करने पर तृतीय हल की प्राप्त होगी।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० के० सक्सेना का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. भटनागर, के० पी०। **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1955, **47** 43-52.
2. बृजमोहन। **वही**, 1932, **24**, 163-176.
3. ब्रामविच, टी० जे० ई० ए०। An Introduction to the Theory of Infinite Series, **मैकमिलन, लन्दन**।
4. एवेरिट, डब्लू० एन०। **क्वार्ट० जर्न० मैथ०, आक्सफोर्ड**, 1959, **10II**, 270-279.

5. फाक्स, सी० । **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **93**, 395-428.

6. नारायण, आर० । Rendi. Sem. Mat. Torino, 1956-57, **16**, 269-300

7. वही । **मैथ० जाइट० श्रि०**, 1959, **70**, 297-299.

8. वही । **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1962, **13**, 950-59.

9. सक्सेना, आर० के० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस (इंडिया) में प्रकाशनार्थ स्वीकृत ।**

10. शर्मा, ओ० पी० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया) में प्रकाशनार्थ स्वीकृत ।**

11. वाटसन, जी० एन० । **क्वार्ट० जर्न० मैथ०, आक्सफोर्ड**, 1931, **21**, 298-308

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।
2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व में संशोधन के लिए उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये दो रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $K_4Fe(CN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये गये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।
7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टिल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार हो कर आने चाहिए। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
8. लेखों में निर्देश (References) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०। **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।
9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिण्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।
10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, प्रयाग"**, इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जायँगे।

प्रबंध सम्पादक